

# 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

160

## I / Endomorphismes remarquables (G)

- Isométries (G) : équiv. entre  $f$  isométrie et  $f$  écriture matricielle de  $f$  :  ${}^E A A = A {}^E A = I_n$   
déterminant  $= \pm 1$ .  
→ groupe des isométries, sg. des is. directes (suite exacte)
- Endomorphismes adjoints : déf., matrice de l'adjoint  
déf. : end. autoadjoint, end. normal, end. orthogonal  
représentation matricielle  
Csq. : end. sym  $\Rightarrow$  ser, dimension, supplém. des matrices antisym.  
end. orth  $\Leftrightarrow$  isométrie
- Supplémentaire orthogonal : dans un espace euclidien  $E$ ,  
tout ser  $F$  admet un suppl. orthogonal  
si  $F$  stable par  $f \Rightarrow F^\perp$  stable par  $f^*$ .  
→ projection  $\perp$ , sym  $\perp$  : réflexion, retournement

## II / Endomorphismes normaux

- Réduction des endom. normaux (G)  
→ dans le cas réel
- Application aux cas des end. autoadj. et antisym. (G)  
→ dans le cas des end. sym, les vp sont réelles  
déf. : end. autoadj. positif, déf. positif  $\rightarrow$  convexes  
Caractérisation avec les vp.  
Appl. : racine carrée, haméo exp :  $S_n \rightarrow S_n^{++}$
- Pseudo-réduction simultanée (Al)  
→ log-convexité du det + ellip. de John

## III / Endomorphismes orthogonaux

- Cas particuliers d'un endom. normal (G)  
on peut retrouver le thm de réduction à l'aide du lemme :  
 $F$  stable par  $f \Rightarrow F^\perp$  stable par  $f$ .  
appl. : classification des isométries du plan et de l'espace  
exp. : Antis( $E$ )  $\rightarrow$  SO( $E$ ) surjective.
- Etude algébrique : gén. de O( $E$ ), de SO( $E$ ) (Perrin)  
Connexité par arcs de SO( $E$ ) (FGV)  
Simplicité de SO<sub>2</sub>( $\mathbb{R}$ ) (FGV)
- Etude topologique (MT) : O( $E$ ) compact  
La décomposition polaire est un  $\mathbb{A}$ -module entre / (MT)  
O( $E$ )  $\times$   $S^{n-1}(E)$  et GL( $E$ )  
Enveloppe convexe de O( $E$ ) (Queffelec)  
→ mettre la déc. polaire dans le cas  $S^+(E)$   
→ pas unicité