

(158) Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

158

I/ Généralités (Gomdin, Grifone)

- Déf: matrice hermitienne, symétrique $\rightarrow$ ex: différentielle seconde
 $\rightarrow$ espaces vectoriels réels: $S_n, H_n \rightarrow$ dimensions
coeffs diag réels
 - Lien avec les formes quad. hermitiennes (isomorphisme), $x^* H x = 0 \forall x \Rightarrow H = 0$.
 - Matrices symétriques positives, déf. positives
 $\rightarrow$ ng topologiques: $S_n^+ + H_n^+$ cône fermé
 S_n^{++} convexe
- Inég. de Cauchy-Schwarz

II/ Congruence et conjugaison (Gomdin, Grifone)

- $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur H_n par congruence $(P, H) \mapsto P^* H P$
 $\rightarrow$ thm de Sylvester, réduction de Gauss
 $\rightarrow$ signature: invariant
- Vers la réduction: déf de end adjoint, end autoadjoint
 f autoadj: F stable par $f \Rightarrow F^\perp$ stable par f
 $\rightarrow$ il existe une b.c. de $\mathbb{R}$, de plus les λ vp sont réelles
- $U_n(\mathbb{C})$ agit sur H_n par conjugaison = congruence
invariant: spectre avec multiplicité
CSG: diagonalisation simultanée
 $A \in S_n^+ \rightarrow v_p \geq 0, A \in S_n^{++} \rightarrow v_p > 0$
appel: critère de Sylvester (FGV alg 3)
 $+ S_n^{++}$ ouvert de S_n

III/ Matrices symétriques/hermitiennes et valeurs propres (Sene)

- Quotient de Rayleigh
- Carollaine: inég de Weyl, λ_n est convexe, λ_1 est concave
appl: p est une norme sur S_n, H_n .
- Entrelacement (Sene)
lien entre les vp d'une matrice $A = \begin{pmatrix} B & z \\ z^* & c \end{pmatrix}$ et les vp de B .

IV/ Matrices positives

- Minimisation d'une fonctionnelle, méthode du gradient conjugué
- Racine carrée
Prop sur la diagonalisabilité de HK , où $H \in H_n, K \in H_n^{++}$
La unicité de la $\sqrt{}$
+ appl: décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{C}) / GL_n(\mathbb{R})$
+ appl (MT) deux matrices réelles initialement semblables sont orthogonalement semblables.
- Inégalités Hölderiennes
 $\|K^{1/2} \cdot H^{1/2}\|_2 \leq \|K - H\|_2^{1/2}$
utilise: $\|\cdot\|_2 = \rho$ pour les matrices symétriques
et $B^2 - A^2 = (B-A)^2 + A(B-A) + (B-A)A$
et si $0 \leq H \leq K$ alors $H^{1/2} \leq K^{1/2}$.
- Déterminant est log-concave
ou sur H_n^{++} $H \mapsto (\det H)^{1/n}$ est concave
Ellipsoïde de John.