(156) Exponentielle de matrices. Applications.

I/ Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

· Propriétés élém : déf, convergence uniforme sur tout compact, continuité (MT ou Gourd)
exp A est un polynôme

Règles de calcul : si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$ + contre-ex
(MT ou G) transposition, $P^{-1} e^A P$, ... ↳ exp A inversible
$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$

Réduction : décomposition de Dunford puis calcul pratique (G)
tjrs ds le cas où χ_A est scindé, e^A diag ⟺ A diag
csq : $\exp(A) = I_n$ ⟺ A diag et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

II/ Propriétés topologiques de la fonction exponentielle

· Injectivité, surjectivité, bicontinuité
(BMP) exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ surjective, image dans le corps $\mathbb{R}$.
appl : $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs
(MT) non injectivité, cepdt, on peut se réduire à un voisinage de 0 sur lequel $\exp A = Id \Rightarrow A = 0$.
Inversion : déf du logarithme + thm d'homéo entre les nilpotents et les unipotents.
· Homéomorphisme entre S_n et S_n^{++}, décomposition polaire.
· Régularité
(MT) → application C^1, différentielle en 0, $d(\exp|_{\mathbb{C}[A]})_M(H) = (\exp M)H$
(Laf) → exp est analytique, donc C^∞
différentielle en M quelconque (MT, 3.8, Rouv)
↳ appl : $GL_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sg arbitrairement petit

III/ Applications

· Paramètres
$t \mapsto \exp(tA)$ est C^∞ → donner sa dérivée
(MT) : $\exp(t(A+B)) = \exp tA \exp tB \ \forall t \Rightarrow$ A et B commutent
sg à un paramètre : thm

· Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{C})$ (MT)
$\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)^n \to \exp(X+Y)$
Algèbre de Lie
Thm : tout sg fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$
→ exemples : $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{R})$.

· Equations différentielles (Laud)
Equation à coeff constant : $Y' = AY$
(G) : $e^{tA} \to 0$ ssi $\operatorname{Re}(Sp\, A) \subset \mathbb{R}^{*}_{-}$
(L) Si toutes les vp de A vérifient $\operatorname{Re}\lambda < -a < 0$, alors il existe $C > 0$ tq $\|e^{tA}\| \leq C e^{-at}$.
+ évtl : Liapounov