155

(155) Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

I / Éléments propres et polynômes d'endomorphisme

· Valeur, vecteur, sev propre (G) — Le chapitre d'intro : ne pas faire trop long.

→ sev propres en somme directe (Vandermonde)

· Polynôme caractéristique (G) — $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$

→ déf, racines = vp. , pol car. de la restriction d'un end.

· Idéal des polynômes annulateurs (G)

Tout pol annulateur annule les vp. — Lemme des noyaux

Déf du polyn minimal

Thm de Cayley-Hamilton.

II / Diagonalisabilité

· Critères de diagonalisabilité (G)

. Déf , puis si χ_f a toutes ses racines simples alors f diagonalisable.

. Critères équiv : · f diag

· χ_f scindé et les racines ont multiplicité $\dim E_{\lambda_i}$

· E est somme directe de ses sev propres.

· Il existe un pol annulateur scindé à racines simples

· π_f scindé à racines simples

→ cas des corps finis (exo G), (ént) cas cyclique

· Restriction à un sev stable

· Diagonalisation simultanée

avec lemme : si A, B commutent, sev propre stable par l'autre.

+ appl (BMP)

· Critères topologiques

· $M \in M_n(\mathbb{R}) \to \mu_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{C}}$; diagon sur $\mathbb{C}$ ssi $\mu_{\mathbb{C}}$ sans facteur carré

· $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: l'ensemble des matrices diagonalisables à vp distinctes est ouvert et dense dans ——— trigon ———.

Donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$.

· $K = \mathbb{C}$, A diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée.

III / Espaces hermitiens

· Endomorphismes normaux (G)

propriété, thm de réduction → dans $\mathbb{C}$ / → dans $\mathbb{R}$

cas particulier des end unitaires autoadjoints

· Diagonalisation simultanée des end. autoadj (G)

+ appl : dét log convexe → ellipsoïde de John

· Appl : racine carrée d'un end. autoadj. positif → décomposition polaire

IV / Applications

· Calcul de puissance, d'exponentielle → facile dans une base de $\vec{v}p$.

résolution de l'éq. diff $Y' = AY$.

· Décomposition de Dunford

→ expressions polynomiales (projecteurs spectraux)

→ calcul théorique de $\exp(A)$

↳ ⚠ nécessite de connaître les vp de A.

→ Dunford dans $\mathbb{R}$: cf rmq topologiques : D diagonalisable dans $\mathbb{C}$