

(154) Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

154

(BMP, Goblot, Gaudin)

I/ Sous-espaces stables

- Def : exemples : Ker, Im
 - si $E = \mathbb{R}$: tout end. de dim finie admet une droite ou un plan stable $\leadsto$ prendre un polynôme annulateur, le décomposer en irréductibles, et remarquer qu'un des $u - \lambda \text{id}$ ou $u^2 + Bu + \delta \text{id}$ n'est pas injectif.
 - ex : projecteurs et symétries
- Def : endom. induit.
- Commutativité : $u \circ v = v \circ u \Rightarrow \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ stable par v .
- Polynômes cl'end : $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ u -stables
 - ex : polynôme minimal, caractéristique, polynôme minimal d'un élé. x

II/ Lemme des noyaux et conséquences

(BMP)

- Lemme de décomposition des noyaux
 - + end. semi-simples
- Endomorphismes diagonalisables (Goblot, Gaudin)
 - Stabilité des scv propres
 - Critère de diagonalisation (Fonalg2)
 - u diag ; F stable $\Rightarrow u|_F$ diag $\rightarrow$ caractér. des scv stables de u diag $\rightarrow$ diagonalisation simultanée.
- Endomorphismes trigonalisables
 - Sous-espaces caractéristiques : def (Goblot)
 - Critère de trigonalisation
 - u trig ; F stable ou $u|_F$ trig $\rightarrow$ trigon. simultanée.
 - (Gaudin les scv caractéristiques sont stables et décomposition de Dunford)
- Endomorphismes normaux (Gaudin)
 - Dualité : def de A^t, B^o
 - application transposée : F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u^t .
 - réduction des endomorphismes normaux.
- Endomorphismes quelconques
 - $\langle x \rangle_u$ stable, décomposition de Frobenius
 - Invariants de similitude

III/ Représentations de groupe

- Def : sous-représentations, caractères irréductibles
- Théorème de Murnaghan.