

(108) Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

0/ Introduction

Def: sous-groupe engendré par une partie (après rappels sur l'intersection de deux sg)
 partie génératrice d'un groupe
 def: groupe décrit, caractérisation
 Défense du plan: vérifier une prop. univ^{te} sur les gén. · surjectivité d'un morph.
 Intérêt: morphisme déf. par l'image des gén. · simplicité d'un groupe

1/ Groupe abélien

Groupe monogène et cycliques (Calais)

- caractérisation ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) → sg d'ordre n pour $d|n$
- générateurs de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
- Théorème chinois, puis calcul de $\phi(n)$.
- Appl (Perrin): automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ et détermination des groupes d'ordre pq , $p < q$.

Groupe abélien de type fini (Calais) def

- groupe abélien libre, ex: $\mathbb{Z}^n$ → ne pas rentrer dans les détails, insister sur les ex
- groupe abélien de torsion, ex: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- thm de structure, avec unicité + exemple (Carroll)
- Appl (Carroll) G abélien fini, il existe un elt d'ordre p pour des ordres
- Appl (Carroll) $\forall d|n$, $n=|G|$ abélien, il existe un sg d'ordre d .

2/ Groupe symétriques et diédraux

Groupe symétrique (Calais)

- Générateurs de S_n : cycles → appl. décomp en cycles transpositions } appl: caractérisation
- FGN: on ne fait pas en moins de $(n-1)$ transpositions } linéaires de S_n
- les 3-cycles engendrent A_n (Perrin)
 Appl: A_n est simple, $D(A_n) = A_n$; $D(S_n) = A_n$, $n \geq 2$.

Groupe diédral (Calais)

def, générateurs, proposition sur la réciproque
 (Perrin) le sg des rotations est distingué ⇒ produit semi-direct.

3/ Groupe linéaire et ses sous-groupes

$GL(E)$, $SL(E)$ (Perrin)

dilatations, translations → générateurs de GL , SL
 Appl: calcul des centres de GL , SL , $GL_n(\mathbb{C})$ commutatif par arcs,
 Morphismes de $SL_n(\mathbb{C})$ dans un groupe fini (FGN)

$PSL_2(\mathbb{C})$ (Alessandri)

action sur le $\mathbb{P}^1$ -plan de Poincaré et générateurs

Sur SO_3

Thm de Cartan · Dieudonné
 $SO_3(\mathbb{R})$ commutatif par arcs (FGN) simplicité de SO_3 (FGN)

+ est partie génératrice

homomorphismes (gén)