107

(107) Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

I / Représentations et caractères

· Représentations (Colmez)

déf, ex, degré, groupe fini, $\mathbb{C}$-espace vectoriel

si l'action est fidèle, G peut être vu comme sg de $GL(V)$.

Dans la suite, on se place en dimension finie.

· Caractères (Colmez)

$g \in G$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable et ses vp sont des racines n-èmes de l'unité

· Déf de caract, degré, caractère linéaire, fonction centrale

→ des exemples : ε, det ...

· Construction des représentations

Somme directe, résultat sur les caractères

Représentation $Hom(V_1, V_2)$, caractères

$Hom_G(V_1, V_2)$ → déf de l'isomorphie de représentations.

Représentation de permutation, repr. régulière.

II / Décomposition de représentations

· Représentations et caractères irréductibles (Colmez)

déf : sous-rep, repr. irréd, car irréd, exemple

Thm de Maschke avec le lemme qui précède sur le pr. sc G-invariant

Lemme de Schur

· Orthogonalité des caractères

déf : produit scalaire sur l'ensemble des fonctions centrales

Thm de Frobenius avec lemme qui précède

Corollaires : nombre de représentations irréductibles, décomposition

isomorphie ⇔ m̂ caractère

Irréductibilité ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

· Applications

· Table de caractères : déf

Thm de Burnside, construction, exemples ($\mathfrak{A}_5$, ...)

⇝ représentation irréd de $\mathfrak{S}_n$.

· Simplicité : caractérisation des sg distingués (Peyré)

III / Groupes abéliens finis (Peyré)

· Dual : d'un groupe cyclique, d'un groupe abélien

Thm d'isomorphisme.

contre-ex dans le cas non abélien $\hat{\mathfrak{S}}_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : \{1, \varepsilon\}$.

· Appl du lemme de Schur : les repr. irréductibles de G sont de degré 1.

Formule de Burnside : c'est une caractér. de la commutativité.