

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

I / Structure algébrique du groupe linéaire

1) Déf de $GL(E)$, $SL(E)$ (Perrin) identification $GL(E)$, $GL_n(K)$

f inversible $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
suite exacte de SL , produit semi-direct

2) Etude algébrique de GL_n (Perrin)

• générateurs $\rightarrow$ (algorithme de Gauss)
• centre, groupe dérivé

$\hookrightarrow$ factorisation de $\varphi: GL_n(K) \rightarrow$ abélien en φ produit

3) Actions de $GL(E)$

$\rightarrow$ sur $M_n(K)$ ou $S_n(K)$

action sur E :
simplement transitive
sur les bases de E

$\rightarrow$ action sur $M_n(K)$, description des invariants (Caldes-G)

équivalence, similitude, congruence

déf de PGL , action de PGL sur $\mathbb{P}^n$

csq du thm de corédution (BMP, en exo)

sg de $GL_n(K)$ d'exposant 2, appl: $GL_n^2(K) \simeq GL_n(K)$

sg finis abéliens de $GL_n(K)$ qd $\text{car}(K) \neq 2$

II / Sous-groupes remarquables de $GL(E)$

1) Sous-groupes finis

• Morphisme de groupe de G_n dans $GL_n(K)$ (BMP)

Tout groupe fini injecte dans $GL_n(K)$

Représentations de groupe

• Cas particuliers des corps finis $\rightarrow$ cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$,
 $SL_n(\mathbb{F}_q)$

$\rightarrow$ thm de Sylow

$\rightarrow$ Isomorphismes exceptionnels (Perrin)

2) Groupe orthogonal et ses sous-groupes (Perrin)

• formes sesquiliéaires, groupes unitaires, orthogonal, SO_n

• générateurs du groupe orthogonal, de SO_n

• centre

• thm de réduction

+ exo: cas de $\text{car dim } 2, 3$
 $SO_2 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ déf de l'angle
 SO_3 simple / sg finis de SO_3

III / Etude topologique du groupe linéaire

1) Propriétés topologiques de GL (MT)

• continuité de $M \mapsto \det M$, $M \mapsto M^{-1}$

• ouvert-dense + appl: $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

• $GL_n(K)$ connexe, $GL_n(\mathbb{R})$ non

2) Propriétés topologiques de O_n (MT)

• O_n sous-gpe compact

appl: décomposition polaire homéomorphe

3) Exponentielle de matrices (MT)

exp de classe C^∞ , difféo local en 0

pas de sg de $GL_n(K)$ arbitrairement petit.