

(104) Groupes finis. Exemples et applications.

Essentiellement Combes
avec Gaudin en appui.

I/ Spécificités des groupes finis (Combes)

- Ordre, exposant
ordre d'un groupe, ordre d'un élément
(G): exo sur l'exposant d'un groupe abélien fini
(FON alg 2): Thm de Burnside + cor: $(2/22)^{100}$ ^{Tran où ce n'est pas un sg de G_{100}}
- Théorème de Lagrange + def de l'indice d'un sg
+ applic: intersection de sous-groupes.
- Action d'un groupe fini
Equation aux classes
csq: p-groupes, thm de Cauchy
Formule de Burnside
csq: collier de perle, sg finis de $SO_3 \rightarrow$ (à mettre plus tard)

II/ Groupes finis abéliens (Combes)

- Groupes cycliques
générateurs, fonction d'Euler
morphisme entre gres cycliques
Sous-groupes d'un groupe cyclique, relation $n = \sum p_i d_i$
Caractérisation des gres cycliques
+ appl: RSA dln ^{sg fini abélien de G_{100} (B.M. 21)}
↳ Gaud, Dem.
- Thm de décomposition des groupes abéliens finis
Suite des invariants de G
Corollaire: il existe un élt d'ordre le ppcm des ordres.
- Ex: Groupes dérivés et groupes résolubles (Combes)

III/ Groupes finis non abéliens

- Thm de Sylow (Perrin / Combes)
→ structure des groupes d'ordre nq
- Groupe des permutations
décomposition en produit de cycles, classes de conjugaison
générateurs de G_n, A_n
Tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sg de G_n
↳ thm de Cayley (Perrin)
→ affaire avant les thms de Sylow.
Produit semi-direct et $G_n = A_n \rtimes 2/22$.
- Groupes d'ordre 8 (Kantor)
Lemme: si tout élt est d'ordre ≤ 2 , G est abélien.

IV/ Applications

- Groupes d'isométries
Groupes diédraux (Perrin)
Sg finis de SO_3 (B1)
groupe d'isométries du tétraèdre (G_4), de l'octaèdre et du cube ($G_6 \times 2/22$), du dodécaèdre et de l'icosaèdre ($A_5 \times 2/22$).
- Représentations
Def d'une table de caractères (sans rappeler toute la théorie)
→ table de caractère de G_i