NOM : NUSSBAUMER Prénom : Josué Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → (Analyse)

Sujet choisi : 264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Autre sujet :

Références : Ouvrard, Probabilités 1
Probabilités 2 (Dév. 2)
Benaïm - El Karoui (Dév. 1)

Un ensemble sera dit dénombrable s'il peut s'injecter dans $\mathbb{N}$. Un ensemble fini sera donc dénombrable.
On supposera connus les résultats sur les espaces de probabilité.

I - Généralités

1 - Définitions

Définition 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et E un ensemble. Une application $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable et pour tout $x \in E$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Remarque 2 : Si $X : (\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une variable aléatoire discrète, l'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$, $A \mapsto P(X^{-1}(A))$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$, appelée loi (de probabilité) de la variable aléatoire X.

Remarques 3 :
* Pour les applications, en général, seule compte la loi P_X et l'on explicite rarement X et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
* La loi d'une variable aléatoire discrète X est déterminée par $X(\Omega)$ et $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$.

2 - Exemples de lois usuelles

Loi uniforme : $X(\Omega)$ est un ensemble fini et $P(X=x) = \frac{1}{\mathrm{card}(X(\Omega))}$ pour $x \in X(\Omega)$. On note cette loi $\mathcal{U}(X(\Omega))$. Elle modélise le choix "au hasard" sur un ensemble fini.

Loi de Bernoulli de paramètre p : $p \in [0,1]$.
$X(\Omega) = \{0,1\}$, $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$. On la note $\mathrm{Ber}(p)$. Elle modélise une expérience aléatoire avec deux résultats possibles.

Loi binomiale de paramètre (n,p) : $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
On la note $\mathcal{B}(n,p)$. Elle modélise le nombre de succès dans une suite de n expériences indépendantes de paramètre p.

Loi géométrique de paramètre p : $p \in]0,1[$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On la note $\mathcal{G}(p)$.
Elle modélise le nombre d'échecs nécessaires avant d'obtenir un succès, dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Loi de Poisson de paramètre λ : $\lambda > 0$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

3 - Indépendance de variables aléatoires discrètes

Définition 4 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes : $X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to E_i$. Elles sont indépendantes si pour tout $J \subset I$ fini et pour toute famille d'événements $(A_j)_{j \in J}$ telle que $A_j \subset X_j(\Omega)$,
$P(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\}) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$

Proposition 5 : C'est équivalent à : pour tout $J \subset I$ fini et pour toute famille $(x_j)_{j \in J}$ telle que $x_j \in X_j(\Omega)$,
$P(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\}) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j)$.

Exemple 6 :
Si $X \sim \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $Y \sim \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ avec X, Y indépendantes, alors X et $X+Y$ sont indépendantes.

Contre-exemple 7 : Il faut distinguer indépendance deux à deux et indépendance globale : on peut avoir 2 à 2 et on note $A = \{X_1 \text{ est impair}\}$, $B = \{X_2 \text{ est impair}\}$ et $C = \{X_1 + X_2 \text{ est impair}\}$ où X_1 est la valeur du dé :
$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) P(B) P(C)$

II - Moments et fonction génératrice

1 - Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|.\mathbb{P}(X=x)$ est finie, on appelle espérance de X le nombre

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

et on dit que X est intégrable. (Les sommes se font sur des ens. dén.)

Définition 9 : Si $r\in\mathbb{N}^*$ et si X^r est intégrable, le nombre $\mathbb{E}[X^r]$ est appelé moment d'ordre r de X. En particulier, si X^2 est intégrable, X et $(X-\mathbb{E}[X])^2$ le sont aussi et on appelle variance de X le nombre $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Exemples 10 :
* Si $X\sim \mathrm{Ber}(p)$, $\mathbb{E}[X]=p$ et $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$.
* Si $X\sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathbb{E}[X]=np$ et $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$.
* Si $X\sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}[X]=\frac{1-p}{p}$ et $\mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$.
* Si $X\sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}[X]=\lambda$ et $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.

Proposition 11 (Inégalité de Markov) : Si X est intégrable, on a pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X|>\varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\varepsilon}$.

Proposition 12 (Inégalité de Tchebichev) : Si X^2 est intégrable, on a pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|>\varepsilon) \le \frac{\mathrm{Var}\,X}{\varepsilon^2}$.

Application 13 (Théorème d'approximation de Weierstrass) : Toute fonction continue $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ peut être uniformément approchée par des polynômes.

2 - Fonction génératrice

Définition 14 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $s\in\mathbb{R}$ tel que s^X est intégrable, on note $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$. La fonction G_X est appelée fonction génératrice de X.

Proposition 15 : Le domaine de définition de G_X contient $[-1,1]$. De plus, G_X est continue sur $[-1,1]$ et C^∞ sur $]-1,1[$, et on a $G_X(1)=1$ et $\forall s\in[-1,1]$, $|G_X(s)|\le 1$.

Exemples 16 :
* Si $X\sim \mathrm{Ber}(p)$, $G_X(s) = ps+(1-p)$.
* Si $X\sim \mathcal{B}(n,p)$, $G_X(s) = (ps+(1-p))^n$.
* Si $X\sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$.
* Si $X\sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(s) = \exp(\lambda(s-1))$.

Théorème 17 : La fonction génératrice G_X caractérise la loi de X ; on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire 18 : Soient $X_1,\dots,X_m$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\varphi_{X_1+\dots+X_m}(s) = \varphi_{X_1}(s)\dots\varphi_{X_m}(s).$$

Applications 19 : La somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n+m,p)$. La somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Proposition 20 : X admet un moment d'ordre $r\in\mathbb{N}^*$ si et seulement si G_X est r fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, on a $G_X^{(r)}(1^-) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)]$.

Proposition 21 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de $(X_n)_n$. On pose $S=\sum_{j=1}^{T} X_j$. Alors $G_S = G_T\circ G_{X_1}$ sur $[-1,1]$.

3 - Application aux processus de branchement

Soit μ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, de moyenne $m=\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mu(\{n\})>0$. Soit $(\xi_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de loi μ. Le processus (Z_n), dit processus de branchement ou processus de Galton-Watson, est défini par

$$Z_0=1 \text{ et } Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_{n,j} \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

Remarque 22 : Z modélise la transmission d'un nom de famille porté à l'origine par un seul homme.

Théorème 23 : On note $\text{Ext} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} [Z_n = 0] = \{(Z_n) \text{ stationne à } 0\}$.
Alors :
* si $\mu = \delta_1$, $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 0$: il y a survie presque sûre.
* si $\mu \neq \delta_1$ et $m \leq 1$, $\mathbb{P}(\text{Ext}) = 1$: il y a extinction presque sûre.
* si $m > 1$, $\mathbb{P}(\text{Ext}) < 1$: il y a survie avec probabilité non nulle.

III - Résultats de convergence

Définition 24 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que cette suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Théorème 25 (loi faible des grands nombres) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et admettant un moment d'ordre deux. On suppose de plus
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j] \xrightarrow[n\to\infty]{} m \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \text{Var}(X_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Alors la suite $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ converge en probabilité vers m.

Remarque 26 : Le théorème s'applique en particulier si les X_n sont de même loi.

Corollaire 27 (Théorème de Bernoulli) : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de même probabilité p. Alors la suites des variables aléatoires $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$ converge en probabilité vers p.

Définition 28 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)].$$

Proposition 29 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans E. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = x)$.

Théorème 30 (des événements rares de Poisson) :
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $(A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq M_n)$ d'événements indépendants définis sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} 1_{A_{n,j}}$.
On suppose que
$$\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \text{ avec } \lambda > 0.$$
Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Corollaire 31 : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, avec $\lambda > 0$. Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 32 : La loi de Poisson modélise donc le nombre d'apparitions d'événements rares.

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\int_0^x f(x+t)\,dy = f(x) = \int_0^x f(y)\,dy$

$\int_x^{x+t} f(y)\,dy$

$\text{da cui } f(x) = \int_x^{x+t} f\,dx = \int_0^x f\,dx$

$\text{con } f \text{ affine}$

Théorèmes des événements rares de Poisson

Référence : Ouvrard, Probabilités 2, p 311 ou 321

Théorème : Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq M_n\}$ d'événements indépendants définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathbb{P}(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} 1_{A_{n,j}}$.
On suppose : * $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$, $\lambda > 0$

* $\max_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration : On va utiliser le théorème de Lévy. Par indépendance des $A_{n,j}$, $1 \leq j \leq M_n$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{1_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \left(p_{n,j} \exp(it) + (1 - p_{n,j})\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{M_n} \left(1 + p_{n,j}(\exp(it) - 1)\right).$$

Si Log est la détermination principale du logarithme complexe, il résulte de la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout z tel que $|z| < 1$, on a

$$\mathrm{Log}(1+z) = z + \int_0^1 (1-u) \frac{-1}{(1+uz)^2} z^2 \, du = z - z^2 \int_0^1 \frac{(1-u)}{(1+uz)^2} \, du.$$

Notons $z = \exp(it) - 1$. Puisque $\max_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\max_{1 \leq j \leq M_n} |p_{n,j} z| < \frac{1}{2}$.
Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$\mathrm{Log}\, \varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{M_n} \mathrm{Log}(1 + p_{n,j} z) = \sum_{j=1}^{M_n} \left[p_{n,j} z - p_{n,j}^2 z^2 \int_0^1 \frac{(1-u)}{(1+uzp_{n,j})^2} \, du \right].$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \geq N$ et tout $u \in [0,1]$,

$$|1 + u p_{n,j} z| \geq 1 - u p_{n,j} |z| \geq 1 - p_{n,j} |z| \geq \frac{1}{2}.$$

Donc, pour tout $n \geq N$,

$$\left| \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2}\,du \right| \leq \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{|1-u|}{|1+up_{n,j}z|^2}\,du$$

$$\leq \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \; 4 \int_0^1 (1-u)\,du = 2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2$$

$$\leq 2 \max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \cdot \left(\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Ainsi, d'après les hypothèses,

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Log} \varphi_{S_n}(z) = \lim_{n\to+\infty} z \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda z .$$

Autrement dit, on a

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \lim_n \varphi_{S_n}(z) = \exp\big(\lambda(\exp(iz)-1)\big) .$$

D'après le théorème de Lévy, S_n converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

En effet, pour $t \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ,

$$\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} . \qquad \square$$

Remarques :

* Si $M_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existerait une sous-suite bornée $(M_{\varphi(n)})_n$.
On aurait alors $\sum_{j=1}^{M_{\varphi(n)}} p_{\varphi(n),j} \leq M_{\varphi(n)} \max_{1\leq j\leq M_{\varphi(n)}} p_{\varphi(n),j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
et donc $\lambda \leq 0$ ce qui contredit les hypothèses. D'où $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

* Le nom du théorème vient du fait qu'il montre qu'un phénomène aléatoire qui peut se représenter comme une superposition d'événements rares (c'est-à-dire d'événements de "petite" probabilité, au sens des hypothèses) et indépendants, suit approximativement une loi de Poisson.

* Le théorème de Poisson est un corollaire de ce résultat : supposons $M_n = n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq n\}$ vérifie $\mathbb{P}(A_{n,j}) = p_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$. La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ et les hypothèses du théorème sont satisfaites.