

NOM : MICHAUD

Prénom : Robin

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 263: Variable aléatoire à densité. Exemples et applications

Autre sujet : Références : Ouvrard 1&2, Barbe-Ledoux, Fouta-Fuchs, Site du canard pour la DEV 2

On suppose connus les résultats de théorie de la mesure	<u>Exemple 5:</u> La loi uniforme sur $[0,1]$ et la loi dont la fonction de densité est $11_{[0,1]}$ - i.o. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b 1_{[0,1]} dx = b-a$ <u>2 - Lois classiques</u> <u>Exemple 6:</u> La loi uniforme sur la partie $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ est la loi de densité $f(x) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)^{-1} 1_{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]}(x)$ <u>Exemple 7:</u> La loi gaussienne sur $\mathbb{R}^n$ de densité $f_{\sigma, m}(x) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ et la loi gaussienne centrée réduite de densité $f_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ <u>Exemple 8:</u> Loi exponentielle de paramètre λ de densité $f_{\lambda}(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ <u>Exemple 9:</u> Loi de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ <u>Remarque 10:</u> On détaillera en annexes les propriétés de ces lois grâce aux outils développés dans la partie III
<u>I - Généralités</u> <u>1 - Éléments théoriques</u> <u>Théorème 1:</u> (Radon-Nikodym) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et ν une mesure qui vérifie $\nu(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, alors il existe $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\nu = \int \cdot \mu$. On dit que ν est une mesure de densité f par rapport à μ. <u>Définition 2:</u> Sur ce modèle, on définit une variable aléatoire à densité comme une v.a. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $P_X(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$, où μ est la mesure de Lebesgue, f mesurable positive vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 1$. <u>Définition 3:</u> On dit que f est la densité de la v.a. X, ou de la mesure de proba P_X. <u>Proposition 4:</u> Une mesure de proba à densité est une mesure sans atome.	

→ ms peu ⇐
c-ex? escalier de fonction.

III - Indépendance et marginales

Définition 11: Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^n$, les v.a. $X_1, \dots, X_n$ s'appellent les marginales de X .

Proposition 12: Si X est de densité f_X , alors les marginales X_i admettent des densités f_{X_i} données par

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

Proposition 13: On obtient ainsi un critère d'indépendance de deux v.a. : si $Z = (X, Y)$, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $f_Z(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Définition 14: Si μ_1, μ_2 sont deux mesures de proba sur $\mathbb{R}^d$, et $S : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'application somme, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$

la mesure image de $\mu_1 \otimes \mu_2$ par S est appelé produit de convolution de μ_1 et μ_2 et est noté $\mu_1 * \mu_2$.

Proposition 15: Si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes à valeur dans $\mathbb{R}^d$, alors $P_{X_1 + X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$

Proposition 16: Cela se traduit en terme de densité par : si X_1 et X_2 sont de densité f_{X_1} et f_{X_2} , alors

$$f_{X_1 + X_2} = f_{X_1} * f_{X_2} \quad \text{au sens du produit de convolution de fonctions.}$$

III - Outils et applications

1- Fonction de répartition

Définition 17: La fonction de répartition F d'une v.a. X est définie par $F(x) = P(X \leq x) = P_X([-\infty, x])$

et $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$ lorsque X est de densité f .

Proposition 18: F satisfait aux propriétés suivantes :

- i) $0 \leq F(x) \leq 1$
- ii) F est croissante, partout continue à droite
- iii) $F(x) \rightarrow 0$ - $F(x) \rightarrow 1$
 $x \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$

Proposition 19: Réciproquement, une fonction qui vérifie les 3 propriétés ci-dessus est la fonction de répartition d'une certaine v.a..

Remarque 20: Si F est dérivable, la connaissance de la fonction de répartition est équivalente à la connaissance de la fonction de densité.

Proposition 21: La fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.

Proposition 22: Des v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $F_{(X_1, \dots, X_n)} = \prod F_{X_i}(x_i)$ où $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ est l'application

définie par $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$

C'est-ce qu'on a aussi un critère pour la fonction de densité?

2 - Espérance, Variance et moments

Théorème 23: (Théorème de transfert) Si: $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ est une v.a., et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors si $g \circ X$ est intégrable par rapport à P , on a

$$\int_{\Omega} (g \circ X) dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X$$

Proposition 24: Si X est une v.a à densité, on a

$$- \mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

$$- \mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx \text{ lorsque cela existe.}$$

$\rightarrow$ calcul des moments.

Proposition 25: Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$- P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon} \quad (\text{Inégalité de Markov})$$

$$- P(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}$$

3 - Fonction caractéristique

Définition 26: Si X est une v.a à valeurs réelles, on appelle fonction caractéristique de X , ou transformée de Fourier de la mesure P_X , la fonction

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

Proposition 27: Soit $g_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ la densité d'une loi gaussienne centrée

Alors: $-\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} g_0(x) dx = 0$

$$- \hat{g}_1(t) = e^{-t^2/2} = \sigma\sqrt{2\pi} g_1(t)$$

Théorème 28: La transformée de Fourier d'une mesure est injective.

Théorème 29: (de Lévy) (admis) Si X_n est une suite de v.a. ~~réelles~~ réelles, et si X_n converge en loi vers X , alors φ_{X_n} converge simplement vers φ_X . Réciproquement, si φ_{X_n} converge simplement vers une fonction φ continue en 0, alors il existe μ tel que $\varphi = \hat{\mu}$ et P_{X_n} converge en loi vers μ .

Application 30: (Théorème "central-limit") Si: X_n est une suite de v.a. i.i.d., et $\gamma_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n\text{Var}(X)}}$

Alors γ_n converge en loi vers $N(0,1)$

4 - La méthode de Monte-Carlo

Théorème 31: Soit $P = [0,1]^d$ muni de la mesure de Lebesgue, $f \in L^1(P)$ et $(X_1, \dots, X_N)$ des v.a. i.i.d de loi uniforme sur P . Soit $e_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) - \int_P f d\mu$

Alors $1 - e_N \xrightarrow{P.S} 0$

2. Si de plus $1P \leq A \cdot 1P \leq B \cdot 1P$, alors $\forall B \in [0, A]$

$$P(|e_N| \geq BA) \leq 2e^{-\frac{NBA^2}{4B}}$$

Remarque 32: La convergence exponentielle en fait un bon outil de calcul

ANNEXE

Tableau récapitulatif de quelques lois de v.a. à densité

Loi	Densité	Esprance	Variance	Fonction caractéristique
Uniforme sur $[a, b]$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Loi exponentielle	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
Loi normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi de Cauchy	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$	Non défini	Non défini	$e^{- t }$

$$E(\phi(y)) = \int \phi(y) f(y) dy$$

- Bestimme $U(x_0, 1)$, falls es möglich ist

Non separabile

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

For change of variables $(x, y) \mapsto (u, v)$:

$$E[\phi(Z)] = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u, v) e^{-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2} du dv$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$\begin{aligned} \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap \partial \Omega \quad (1) \quad \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap \partial \Omega \\ \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap \partial \Omega \quad (2) \quad \text{für } x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap \partial \Omega \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(1/X) \phi] &= \mathbb{E}[(1/X) \phi] \\ \mathbb{E}[\phi] &= \mathbb{E}[\phi] \\ \mathbb{E}[\phi] &= \mathbb{E}[\phi] \end{aligned}$$

$$\int \phi(x) dx = \int \phi(x) \sqrt{|J|} dx$$
 Les mesures μ et ν sont équivalentes $\Leftrightarrow$

$$\text{do de } \left(\frac{x}{1+x}, \frac{1+x}{x} \right) \text{ e } \left(\frac{1}{1+x}, \frac{1}{x} \right)$$

vermutlich: $x_1, \dots, x_n$ die