NOM : VOGIN **Prénom :** Lambert **Jury :**

~~Algèbre~~ ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 262* - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications

(Barbe-Ledoux)

Autre sujet :

Référence : Ouvrard 2 (Booh pas bien), pour le TCL : ZQ & Nourdin (fct caract de $\mathcal{N}(0,1)$)

<u>Cadre</u> : On se place sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé. On considère toujours $(X_n)_n$ et X, une suite de variables aléatoires et une variable aléatoire définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, muni d'une norme $\|\cdot\|$.

I) Convergence presque sûre, convergence en probabilités

1) Définitions

Def 1 : Soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$

. $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$

Def 2 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $\exists C \in \mathcal{F}$ tq $\mathbb{P}(C) = 1$ et $\forall \omega \in C$, $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$.

On note $X_n \xrightarrow{ps} X$.

De manière équivalente,

$X_n \xrightarrow{ps} X \iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}(\|X_n - X\| > \varepsilon)) = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(\sup_{k\geq n} \|X_k - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Def 3 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilités vers X si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leq \alpha$

On note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Rem 4 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. (resp. en proba), la limite est unique à égalité $\mathbb{P}$-presque partout près.

Rem 5 : Si $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^d)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $X = (X^1, \dots, X^d)$,

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \forall j \in [\![1,d]\!],\ X_n^j \xrightarrow{\mathbb{P}} X^j$.

Ex 6 : a) Si X_n vérifie $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

b) Si $X_n = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$ sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, Leb_{[0,1]})$, alors $X_n \not\xrightarrow{ps} 0$.

2) Conditions suffisantes de convergence p.s., lien entre convergences p.s. et en proba.

Prop 7 : (Borel-Cantelli)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$.

Alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

Prop 8 : Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n \varepsilon_n$ converge et $\sum_n \mathbb{P}(\|X_{n+1} - X_n\| > \varepsilon_n) < \infty$, alors X_n converge p.s.

Prop 9 : Si on a $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow{ps} X$.

Développement n°1

C-ex 10 : L'exemple 6.b) contredit la réciproque de la propriété 9.

Prop 11 : (Loi du zéro-un de Borel)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ telle que les A_n sont indépendants

Alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge} \\ 1 & \text{si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ diverge} \end{cases}$

espèce de réciproque de Borel-Cant.

Prop 12 : • $X_n \xrightarrow{ps} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

• $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow \left(\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\right.$ strictement croissante telle que $\left. X_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} X.\right)$

• (X_n) converge en probabilités si et seulement si (X_n) est de Cauchy pour la cv en proba, i.e. $\forall \varepsilon>0, \forall \alpha>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N$, $\mathbb{P}(\|X_n - X_m\| > \varepsilon) \leq \alpha$.

C-ex 13 : L'exemple 6.a) ne converge pas p.s. mais converge en probas

Prop 14 : Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ continue.

• $X_n \xrightarrow{ps} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{ps} f(X)$

• $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

bcp de place et pas forcément pertinent

Ne pas faire !!

Notion de moyenne empirique

3) Lois des grands nombres

On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Les résultats de cette partie sont admis.

Prop 15 : (Lemme de Cesàro)

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $x_n \to x \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$

Prop 16 : (Lemme de Kronecker)

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n < \infty$. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que (b_n) croissante, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Alors $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Prop 17 : (Loi faible des grands nombres)

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n admet un moment d'ordre 2 et $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = 0$ et si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] \to m$, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$.

Prop 18 : (Loi faible des grands nombres - Khintchine)

Si (X_n) indépendants deux à deux, de même loi et admettant une moyenne :

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$$

Prop 19 : (Loi forte des grands nombres)

Si (X_n) indépendants globalement, admettant un moment d'ordre 2, si $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ et $\sum_k \frac{1}{k^2}\mathbb{E}[X_k^2] < \infty$ alors $\overline{X}_n \xrightarrow{ps} m$

Rem 20 : On a aussi dans ces conditions $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} m$, qu'on définit plus loin.

Ex 21 : Posons (X_n) indépendants, tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est $\frac{1}{2n\ln n}(\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{n\ln n}\right)\delta_0$.

(X_n) vérifie la loi faible des grands nombres, mais pas la forte.

Prop 22 : (Kolmogorov - Khintchine)

Si (X_n) indépendants, de même loi, (i)$\Leftrightarrow$(ii) où

(i) : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\overline{X}_n \xrightarrow{ps} c$

(ii) : $X_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Sous ces conditions, $c = \mathbb{E}[X_1]$.

4) Application : test de Kolmogorov-Smirnov

On suppose X_n, X v.a. réelles de loi μ, de fonction de répartition F, et (X_n) indépendants.

Déf 23 : $(X_1 \dots X_n)$ est appelé échantillon de taille n de X

$$F_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\Omega & \longrightarrow & [0,1] \\ (x,\omega) & \longmapsto & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k \leq x}(\omega) \end{array}$$

est appelée fonction de répartition empirique basée sur l'échantillon $(X_1 \dots X_n)$.

Prop 24 : (Théorème de Glivenko-Cantelli)

Pour presque-tout $\omega \in \Omega$, on a : $(F_n(\cdot,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$.

i.e. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x,\cdot) - F(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} 0$.

Appl 25 : (Test de Kolmogorov-Smirnov).

Cf. Annexe.

pas trop d'intérêt de niveau mais faut en parler ! (...)

II) Convergence dans $\boxed{\mathcal{L}^p}$ $(p \geq 1)$.

quotienter !!

1) Équi-intégrabilité

Rem 26 : Si X intégrable, $\int_{|X|>a} |X|\, d\mathbb{P} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$ par convergence dominée.

Déf 27 : $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable si $\sup_{i\in I}\left(\int_{|X_i|>a} |X_i|\, d\mathbb{P}\right) \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$

Prop 28 : Si $\forall i \in I$, $|X_i| \leq X$ où X positive, intégrable, alors $(X_i)_{i\in I}$ équi-intégrable

Cor 29 : Toute famille finie de v.a. intégrables est équi-intégrable

Déf 30 : $(X_i)_{i\in I}$ est dite équi-continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } P(A) < \eta \Rightarrow \sup_{i\in I}\int_A |X_i|\, d\mathbb{P} \leq \varepsilon$$

Prop 31 : $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable si et seulement si $\begin{cases} (X_i)_{i\in I} \text{ est équi-continue} \\ (X_i)_{i\in I} \text{ et bornée dans } \mathcal{L}^1, \text{ i.e. } \sup_{i\in I}\int_\Omega |X_i|\, d\mathbb{P} < \infty \end{cases}$

2) Notion de convergence dans $\mathcal{L}^p$.

Déf 32 : Si $X_n, X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que X_n converge vers X dans $\mathcal{L}^p$ si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.

Si $p=1$, on parle de convergence en moyenne

Si $p=2$, on parle de convergence en moyenne quadratique

← pas spatiale ⇒ se comporte mal avec les opéra° arithmétique ($X_n \xrightarrow{loi} X \not\Rightarrow X_n - X \xrightarrow{loi} 0$, cf C-ex 48)

Rem 33 : $X \mapsto \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$: la limite est unique à égalité $\mathbb{P}$-pp près.

Prop 34 : Soit $p \geq 1$. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $|a-b|^p \leq 2^{p-1}[|a-c|^p + |c-b|^p]$

Prop 35 : On suppose $X_n \in \mathcal{L}^p$. (i)⇔(ii)⇔(iii), où :

(i) : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}^p$

(ii) : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$, i.e. $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m \geq N, \mathbb{E}[|X_m - X_n|^p] \leq \varepsilon$

(iii) : $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et $\exists X \in \mathcal{L}^p$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

3) Lien entre la convergence $\mathcal{L}^p$ et les convergences presque sûre et en probabilité

Cor 36 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Cor 37 : De toute suite qui converge dans $\mathcal{L}^p$, on peut extraire une sous-suite qui cv. p.s.

Prop 38 : Si $1 \leq p \leq q$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$

Rem 39 : La réciproque de la prop 38 n'a pas de sens : une v.a. qui admet un moment d'ordre p n'admet pas nécessairement un moment d'ordre q.

C-ex 40 : Avec X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1-\frac{1}{n})\delta_0$, on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\mathbb{E}[X_n] = 1$ $\forall n$.
Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$

C-ex 41 : L'exemple 6.a) prouve que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{p.s.} X$

C-ex 42 : L'exemple 6.b) prouve que $X_n \xrightarrow{p.s.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$

III) Convergence en loi

1) Définition et premières propriétés

Déf 43 : On dit que X_n converge en loi vers X si $\forall \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue, bornée,
$$\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$$
On note $X_n \xrightarrow{loi} X$.

Rem 44 : Contrairement aux modes de convergence précédents on n'a plus besoin d'être sur le même espace probabilisé. On y reste cependant dans cette leçon.

Prop 45 : (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇔(v) où :

(i) : $X_n \xrightarrow{loi} X$

(ii) : $\forall \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, bornée uniformément continue, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$

(iii) : $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}^d$, $\limsup \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$

(iv) : $\forall O$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\liminf \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O)$

(v) : $\forall A$ borélien de $\mathbb{R}^d$ tq $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$

Prop 46 : Si $d=1$, si F_{X_n} et F_X désignent les fonctions de répartition de X_n et X,
$$X_n \xrightarrow{loi} X \Leftrightarrow \left(\forall x \text{ point de continuité de } F_X \quad F_n(x) \to F(x)\right)$$

Prop 47 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $X_n \xrightarrow{loi} X$.

C-ex 48 : Soit X Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $X_n = X$ $\forall n$. Soit $Y = 1 - X$.
$X_n \xrightarrow{loi} Y$ mais $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} Y$

Rem 49 : Pas unicité de la v.a. limite.

Prop 50 : Si $X_n \xrightarrow{loi} X$, avec X $\mathbb{P}$-pp. constante $= c$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

2) Théorème central limite

$d = 1$

Déf 51 : $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle X,t\rangle}]$ est la fonction caractéristique de X.

Prop 52 : (Théorème de Lévy, admis)
$X_n \xrightarrow{loi} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$.

Prop 53 : $\forall (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z_n \to z \in \mathbb{C}$, on a : $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$ ← détermination du log + dl

Développement n°2

Prop 54 : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X = (t \mapsto e^{-t^2/2})$.

Prop 55 : (Théorème central limite)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendants, de même loi, dans $\mathcal{L}^2$.
Alors, si $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1] > 0$,
$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

Appl 56 : (Calcul d'intervalle de confiance asymptotique)
(X_n) indépendants, v.a. de Bernoulli de paramètre p.
On cherche à estimer p.
En notant $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, α un paramètre d'erreur, et q tel que $\mathbb{P}(N \leq q) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a, pour n assez grand,
$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X}_n - \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}, \overline{X}_n + \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}\right]\right) \simeq 1 - \alpha.$$
Par exemple, avec $n = 1000$ et $\alpha = 0{,}05$, on a $q \simeq 1{,}96$ et le rayon de l'intervalle vaut $\simeq 0{,}03$.

Prop 54 : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. $X = \sigma Y + m$ pr $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
alors $\varphi_X = (t \mapsto e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}})$

Annexe :

Test de Kolmogorov-Smirnov :

On veut, avec la donnée d'un échantillon de taille n, tester l'hypothèse que X a pour fonction de répartition F, où F est une fonction continue.

On se donne une marge d'erreur α.

$$D_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F_n(x,\cdot) - F(x) \right|$$
$$= \sup_{y\in[0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{F(X_k)\leq y} - y \right|$$

D_n a une loi tabulée.

On cherche, dans la table, la valeur d_α telle que $\mathbb{P}(D_n \leq d_\alpha) = 1-\alpha$.

On accepte l'hypothèse si

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |F_n(x,\cdot) - F(x)| \leq d_\alpha$$
ie $F_n(x,\cdot) - d_\alpha \leq F(x) \leq F_n(x,\cdot) + d_\alpha$
ie $F(x) - d_\alpha \leq F_n(x,\cdot) \leq F(x) + d_\alpha$

Exemple :

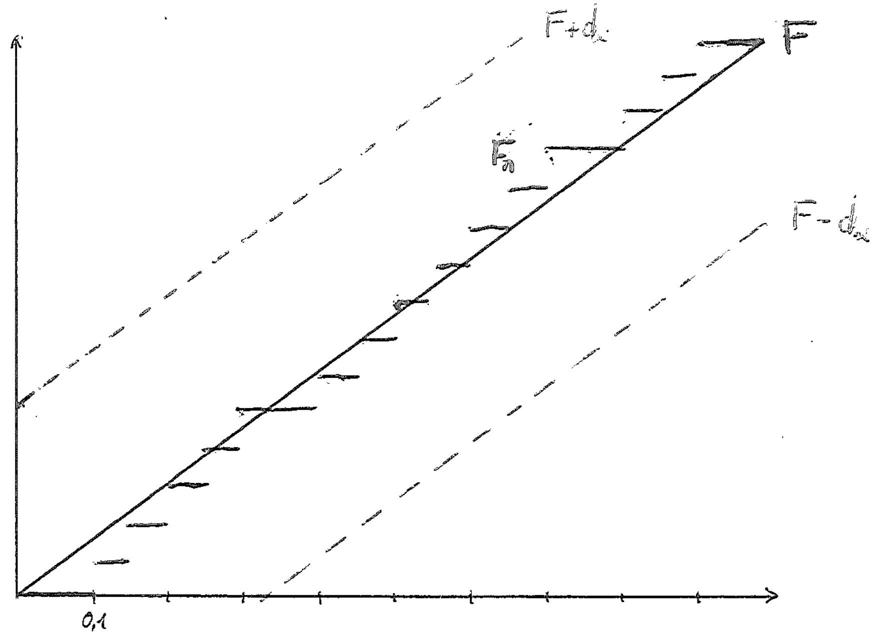
$\alpha = 0,05$. On donne 15 valeurs :

0,1 0,15 0,2 0,25 0,3 0,4 0,45 0,5 0,55
0,6 0,65 0,7 0,8 0,85 0,9

L'hypothèse est $X = \mathrm{Unif}[0,1]$

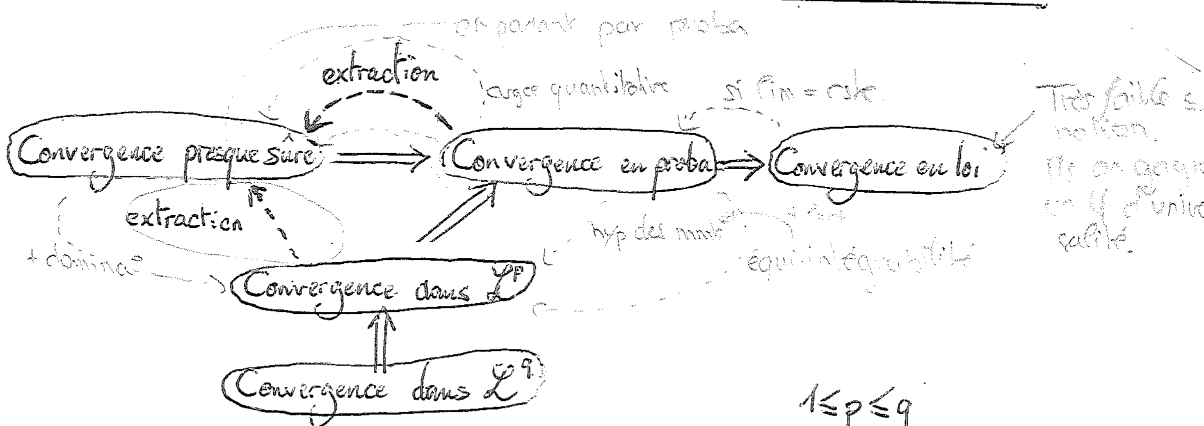
$d_\alpha = 0,34$

Inégalités impliquant proba :
Markov → $L^p \Rightarrow$ proba
Jensen → $L^q \Rightarrow L^p$
Minkowski → $\|\cdot\|_p$ = norme



L'hypothèse est validée.

Appli. possibles : Monte Carlo, Polynômes de Bernstein, Lemme de [illegible], Lemme de Scheffé



cvgce spatiale

À faire au tableau

cv en proba ⟺ de toute sous-suite ∃ une sous-suite qui cv p.s.