NOM : UMBER **Prénom :** Pierre **Jury :**

~~Algèbre~~ ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 261 : Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemple et application

Autre sujet :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de proba

I. Premières définitions et généralités

1) Fonction caractéristique.

Soit X v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^d$

Def 1 : On pose $\varphi_X(\xi) := \mathbb{E}[e^{i\xi \cdot X}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}\, \mathbb{P}_X(dx)$ fonction caractéristique associée à X

Prop 2 : $\cdot\ \varphi_X$ est définie sur $\mathbb{R}^d$

$\cdot\ \varphi_X(0) = 1$

$\cdot\ \|\varphi\|_\infty = 1$

Prop 3 : Si $a \in \mathbb{R}^d$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$, $\varphi_{a+AX}(\xi) = e^{i\xi a}\varphi_X(A^t\xi)$

Th 4 (admis) : φ_X caractérise la loi de X

DEV 1

DEV 1 : Soit X v.a. réelle

- Si $X \in L^m$, alors φ_X est $\mathcal{C}^m$ et : $\forall k \leq m$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$
- Si φ_X est k-fois dérivable en 0, avec $k \geq 2$, alors $X \in L^{2\lfloor \frac{k}{2}\rfloor}$ et $\mathbb{E}[X^j] = (-i)^j \varphi_X^{(j)}(0)$

Prop 4 : Si X est réelle bornée, alors φ_X est $\mathcal{C}^\infty$, la série $\sum \frac{i^k}{k!}\mathbb{E}[X^k]\xi^k$ converge uniformément vers φ_X sur $\mathbb{R}$ et les moments caractérisent la loi

Prop 5 : X et Y sont indépendants ssi : $\forall \xi_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $\forall \xi_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X,Y)}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_X(\xi_1)\varphi_Y(\xi_2)$

Cor 6 : Si X, Y sont deux v.a. réelles bornées, alors : X et Y sont indépendants ssi $\forall k,l$, $\mathbb{E}[X^k Y^l] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^l]$

Prop 7 : Si X et Y sont indépendants à valeur dans $\mathbb{R}^d$, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

App 8 : Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, avec X et Y indépendants, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Ex 9 : On a les fonctions caractéristiques suivantes (voir l'annexe pour les définitions) :

- Si $X \sim \mathcal{U}([a;b])$, $\varphi_X(\xi) = \dfrac{e^{i\xi b} - e^{i\xi a}}{i\xi(b-a)}$
- Si $X \sim \exp(\theta)$, $\varphi_X(\xi) = \dfrac{\theta}{\theta - i\xi}$
- Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a $\varphi_X(\xi) = \exp\left(i m\cdot\xi - \dfrac{\sigma^2\|\xi\|^2}{2}\right)$
- Si $X \sim \mathcal{C}au(a)$, $\varphi_X(\xi) = e^{-a|\xi|}$

Prop 10 : On suppose X à valeur dans $\mathbb{N}$. On note $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X=n)s^n$ la fonction génératrice de X. Alors $\varphi_X(\xi) = g_X(e^{i\xi})$

Ex 11 : On a (définitions dans l'annexe) :

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $\varphi_X(\xi) = 1 - p + pe^{i\xi}$
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\varphi_X(\xi) = (1 - p + pe^{i\xi})^n$
- Si $X \sim \text{géo}(p)$, $\varphi_X(\xi) = \dfrac{pe^{i\xi}}{1-(1-p)e^{i\xi}}$
- Si $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, $\varphi_X(\theta) = e^{-\theta(1-e^{i\xi})}$

2) Transformée de Laplace

Soit X une v.a. réelle ou à valeur dans $[0;+\infty]$

Def 12 : on pose $I_X := \{t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}$

Prop 13 : I_X est un intervalle qui contient 0

Def 14 : On pose $L_X : I_X \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \mathbb{E}[e^{tX}]$: transformée de Laplace ou fonction génératrice des moments

Prop. 15 : L_X est convexe

Prop 16 : On suppose que X est symétrique en loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$. Alors L_X est paire

Prop 17 : Si $X \geq 0$, alors $]-\infty ; 0] \subset I_X$

Prop 18 : Si X est bornée, alors $I_X = \mathbb{R}$

Prop 19 : Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, alors $\cdot\ I_{aX+b} = \frac{1}{a} I_X$

$\cdot\ L_{aX+b}(t) = e^{tb} L_X(at)$

Prop 20 : On suppose X et Y indépendants. Alors
$$I_{X+Y} = I_X \cap I_Y \text{ et } L_{X+Y} = L_X L_Y$$

Th 21 : On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $[-a ; a] \subset I_X$.

Alors : $\begin{cases} \cdot\ L_X \text{ est développable en série entière sur } [-a ; a] \\ \cdot\ X \text{ admet un moment à tout ordre} \\ \cdot\ \forall t \in [-a ; a], L_X(t) = \sum_{m \geq 0} \frac{\mathbb{E}[X^m]}{m!} t^m \\ \cdot\ \forall m, L_X^{(m)}(0) = \mathbb{E}[X^m] \end{cases}$

Th 22 (admis) : Si $I_X \cap I_Y$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et si L_X et L_Y sont égaux sur cet intervalle, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

Ex 23 : On a les transformées de Laplace suivantes :

. Si $X \sim \mathcal{U}([a ; b])$, $L_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$ et $I_X = \mathbb{R}$

. Si $X \sim \exp(\theta)$, $I_X =]-\infty ; \theta[$ et $L_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$

. Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $I_X = \mathbb{R}$ et $L_X(t) = \exp\left(mt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

. Si $X \sim \mathrm{Cau}(a)$, $I_X = \{0\}$

Rem 24 : Si $X \sim \mathrm{Cau}(a)$, X n'admet pas de moment d'ordre 1

Prop 25 : On suppose X à valeur dans $\mathbb{N}$. On note R_X le rayon de convergence de g_X. Alors $I_X =]-\infty ; \ln(R_X))$ et : $\forall t \in I_X$, $L_X(t) = g_X(e^t)$.

Ex 26 : . Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $I_X = \mathbb{R}$ et $L_X(t) = 1 - p + pe^t$

. Si $X \sim \mathcal{B}(m, p)$, $I_X = \mathbb{R}$ et $L_X(t) = (1 - p + pe^t)^m$

. Si $X \sim \mathrm{géo}(p)$, $I_X =]-\infty ; \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)[$ et $L_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$

. Si $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, $I_X = \mathbb{R}$ et $L_X(t) = e^{-\theta(1 - e^t)}$

II Fonction caractéristique et convergence en loi

Def 27 : Soit X_m, X v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^d$. On dit que (X_m) converge en loi vers X si : $\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$,
$$\mathbb{E}[f(X_m)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

Pro 28 :
$$\begin{array}{l} \cdot\ X_m \xrightarrow{loi} X \\ \Updownarrow \\ \cdot\ \forall U \subset \mathbb{R}^d \text{ ouvert}, \liminf_m \mathbb{P}(X_m \in U) \geq \mathbb{P}(X \in U) \\ \cdot\ \forall F \subset \mathbb{R}^d \text{ fermé}, \limsup_m \mathbb{P}(X_m \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F) \\ \cdot\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{ si } \mathbb{P}(X \in \partial A) = 0, \text{ alors } \mathbb{P}(X_m \in A) \to \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

Ex 29 : Si $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et $X_m = X$, alors $X_m \xrightarrow{loi} X$ et $X_m \xrightarrow{loi} 1 - X$. En particulier, il n'y a pas, géométriquement, de notion de « limite en loi »

Prop 30 : $X_n \xrightarrow{loi} X \iff \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d), \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

Ex 31 : Si $X_n \sim \mathcal{U}(\{0;\dots;n\})$, alors $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{loi} \mathcal{U}([0;1])$

Th 32 (Levy) : $X_n \xrightarrow{loi} X \iff \varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi_X$ simplement

App 33 (central limite) : Soit (X_n) suite de v.a. i.i.d. avec $X \in L^2$ et $Var(X) = \sigma^2 > 0$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ alors

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right)}{\sigma} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$$

Rem 34 : Ce résultat a d'abord été montré pour des variables de Bernoullis, de paramètre $\frac{1}{2}$, puis de paramètre p (théorème de Moivre-Laplace) Il n'utilise pas alors le théorème de Levy.

III Etude des grandes déviations

Prop 35 (inégalité de Chernoff) : Soit X v.a. à valeur dans $[0;+\infty]$. Alors :

$$\forall \lambda \geq 0, \forall x \geq 0, \mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\lambda x} L_X(\lambda)$$

DEV 2

DEV 2 (inégalité de Hoeffding) : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ suite de v.a. indépendantes centrées ($\mathbb{E}[X_n] = 0$). On suppose $|X_n| \leq c_n$ p.s., où $c_n > 0$.

Alors : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$

Ex 36 : Si (X_n) est une suite de v.a. i.i.d., $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon n) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$

Ex 37 (théorie des sondages) : Soit (X_n) suite de v.a. i.i.d., $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, on pose $M_n := \frac{S_n}{n}$. Alors $\mathbb{P}\left(|M_n - p| \geq \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \leq 2e^{-2a^2}$.

Ainsi, pour a tel que $2e^{-2a^2} = 0{,}05$, l'intervalle $\left[M_n - \frac{a}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{a}{\sqrt{n}}\right]$ est dit de confiance.

Fin

Ref : Foata, Fuchs, Calcul des probabilités
Pfister, Théorie des probabilités
(Ouvrard, Probabilités 2)

*Annexe : tableau récapitulatif

	définition	fonction caractéristique	I_X	transformée de Laplace
$\mathcal{U}([a;b])$	$\frac{1}{b-a}\chi_{[a;b]}(x)\,dx$	$\varphi_X(\xi) = \frac{e^{i\xi b} - e^{i\xi a}}{i\xi(b-a)}$	$\mathbb{R}$	$L_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
$\exp(\theta)$	$\theta e^{-x\theta}\chi_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx$ $\theta>0$	$\varphi_X(\xi) = \frac{\theta}{\theta - i\xi}$	$]-\infty;\theta[$	$L_X(t) = \frac{\theta}{\theta - t}$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\lVert x-m\rVert^2}{2\sigma^2}\right)dx$	$\varphi_X(\xi) = \exp\left(i m\cdot\xi - \frac{\sigma^2\lVert\xi\rVert^2}{2}\right)$	$\mathbb{R}$	$L_X(t) = \exp\left(mt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
$Cau(a)$	$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}dx,\ a>0$	$\varphi_X(\xi) = e^{-a\lvert\xi\rvert}$	$\{0\}$	
$\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=0)=1-p$ $\mathbb{P}(X=1)=p$ $\quad p\in[0;1]$	$\varphi_X(\xi) = 1-p+pe^{i\xi}$	$\mathbb{R}$	$L_X(t) = 1-p+pe^{t}$
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n,\ p\in[0;1]$	$\varphi_X(\xi) = (1-p+pe^{i\xi})^n$	$\mathbb{R}$	$L_X(t) = (1-p+pe^{t})^n$
$géo(p)$	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k\geqslant 1,\ p\in]0;1[$	$\varphi_X(\xi) = \frac{pe^{i\xi}}{1-(1-p)e^{i\xi}}$	$]-\infty;\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)[$	$L_X(t) = \frac{pe^{t}}{1-(1-p)e^{t}}$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$, $k\geqslant 0,\ \theta>0$	$\varphi_X(\xi) = e^{-\theta(1-e^{i\xi})}$	$\mathbb{R}$	$L_X(t) = e^{-\theta(1-e^{t})}$