253*

NOM : SERAPHIM　　Prénom : Carine　　Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Utilisation de la notion de convexité en analyse 253*

Autre sujet :

I Espaces convexes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit E un espace vectoriel réel.

1) **Def 1** : Une partie C de E est convexe (cv) si $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in C$

Exemple 2 : - les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

- S^1 n'est pas convexe mais $B(0,1)$ l'est

prop 3 Une intersection d'ensembles convexes est convexe

def 4 Soit $S \subset E$, l'enveloppe convexe, $Conv(S)$, est l'intersection des parties cv de E contenant S

exemple 5 l'enveloppe convexe de trois points distincts a, b, c de $\mathbb{R}^2$ est le triangle de sommets a, b, c.

Def 6 Une combinaison convexe de points $x_1, \dots, x_n \in E$ est de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $(\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

prop 7 Soit $S \subset E$, $Conv(S) = \{$combinaisons cv de points de $S\}$

2) Quelques théorèmes

Théo 8 (Carathéodory) : Soit $x \in Conv(S)$, où $S \subset E$ et $\dim E = n < \infty$, alors il existe un sous-ensemble F de S contenant au plus $n+1$ points de S, tel que x soit une combinaison convexe des points de F

exercice 9 Soit $S \subset E$ de dim finie. Si S est compacte montrer que $Conv(S)$ est compacte

Théorème 10 de séparation de Hahn Banach : Soient A, B deux convexes disjoints non vide d'un espace vectoriel normé E. On a alors :

- Si A est un ouvert alors il existe $\Lambda \in E^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(x) \leq \gamma \leq \Lambda(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$
- Si A est compacte et B fermé alors il existe $\Lambda \in E^*$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$

DEV 1

Ref : Clarke et Brézis

Rem 11 Dans le premier cas on a en fait $\Lambda(x) < \gamma \leq \Lambda(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$

prop 12 Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe, et $a \in \partial C$ alors $a \in \partial \bar{C}$ et il existe $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle z, x-a \rangle \leq 0$ $\forall x \in \bar{C}$.

Corollaire 13 : Si E est de dimension finie et A, B sont deux cv disjoints non vides, alors il existe $\Lambda \in E^*$ non nulle telle que $\Lambda(x) \leq \Lambda(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$

contre-exemple 14 : Soit $E = \ell^2$, $A = \ell^\infty_c$ et $B = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in E : x_i > 0 \ \forall i\}$. On a $A \cap B = \emptyset$ mais il n'existe pas de $\Lambda \in E^*$ tel que $\Lambda(x)$ $\Lambda(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$

application 15 Soit E un espace vectoriel normé alors E^* est séparé, ie : $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \exists \Lambda \in E^* \mid \Lambda(x) \neq \Lambda(y)$

proposition 16 : Soit E un evn et F un sev de E tel que $\bar{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ tel que $f(x) = 0$ $\forall x \in F$

application 17 : Soit F un sev de E un evn. Si $\forall \Lambda \in E^*$ $\Lambda(F) = \{0\} \Rightarrow \Lambda = 0$ alors F est dense dans E

II Fonctions convexes

Soit E un evn et $C \subset E$ un convexe. On se donne $f : C \to \mathbb{R}$. Soit F un espace vectoriel et I un intervalle de $\mathbb{R}$

Def 18 : f est dite convexe si $\forall x, y \in C$ et $\forall \lambda \in [0,1]$
$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$. f est concave si $-f$ est convexe

Def $\Leftrightarrow$ dép. $\lambda = 1/2$

Ex 19 : - les fonctions affines de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont convexes et concaves
- Toute norme d'un evn est cv

Prop 20 : une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions cv est convexe

Rem 21 : si g est cv et f est convexe croissante alors $g \circ f$ est convexe (quand elle existe)

Prop 21 Une limite simple de fonctions convexes est convexe

Prop 22 : l'enveloppe supérieure de fonctions convexes est convexe.

1) Lien avec les espaces convexes

Prop 23 : $\forall k \in \mathbb{R}$, $\{x \in C \mid f(x) \leq k\}$ est convexe

Appli 24 : toute boule d'un evn est convexe

Def 25 : L'épigraphe de f, noté $\text{épi}(f)$, est
$\{(x,t) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$

Théo 26 : f est convexe si et seulement si $\text{épi}(f)$ est convexe

Appli 27 : Si $f : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe, différente de $+\infty$ et semi-continue inférieurement (ie : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{x \in F : f(x) \leq \lambda\}$ est fermé) alors $f^* \not\equiv +\infty$, avec $f^*(l) = \sup_{x \in E} \{l(x) - f(x)\}$ pour $l \in F^*$, ce qui permet de définir f^{**}.

Prop 28 : f est convexe si et seulement si ses cordes sont au-dessus de sa courbe lorsque $f : I \to \mathbb{R}$

Rem 29 Le produit de deux fonctions cv n'est pas toujours cv

2) Quelques inégalités

Appli 30 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ convexe alors pour tout $x < z < y$ tel que $x, y, z \in I$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Exercice 31 : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

Prop 32 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ convexe alors $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

Théorème 33 (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels positifs. On a alors
$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Rem 34 : La démonstration utilise la concavité de la fonction $\log$ qu'il sera plus facile de prouver ultérieurement

3) Calcul différentiel

Théo 35 : Soit I ouvert. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, elle est continue sur I et possède en chaque point de I une dérivée à gauche $f'_g(x)$ et une dérivée à droite $f'_d(x)$. De plus, pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, on a : $f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$

Corollaire 36 : Si I est ouvert et si $f : I \to \mathbb{R}$ cv alors sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes (à gauche ou à droite).

Prop 37 : $f : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset E$ convexe ouvert. Si f est différentiable alors f convexe $\Leftrightarrow$ $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x)$ $\forall x, y \in U$

prop 38 : $f : I \to \mathbb{R}$ avec I ouvert, dérivable est cv si et seulement si f' est croissante sur I.

corollaire 39 : $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, f est cv si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I

exemple 40 : – exponentielle est convexe et log concave sur $\mathbb{R}$

– $x \mapsto x^p$ pour $p > 1$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

appli 41 : Soit $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. On a alors $\min\limits_{f \in \mathcal{F}} \left(\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \right)$ est une fonction affine

Rem 42 : Cela prouve que la ligne droite est, parmi les graphes de fonctions C^1, un plus court chemin d'un point à un autre.

prop 43 : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur U, alors f est cv sur U si et seulement si $D^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point.

Exercice 44 : Si q est une fonction non identiquement nulle continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ alors l'unique solution à valeur réelle bornée sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$ est la fonction nulle.

III Applications diverses

1) Minima

prop 45 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe

i) Si f admet un minimum local alors c'est un minimum globale et l'ensemble des points où f atteint ce minimum est un intervalle.

ii) Si f est dérivable et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$, alors admet un minimum global en a.

iii) Si f est deux fois dérivable et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq que $f'' \geq \alpha > 0$ alors f possède un unique minimum.

appli 46 Théorème de Bienaymé Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de proba sur $\mathbb{N}$ différente de δ_1

Soit $(\xi_i^{(n)})$ une suite iid de va de loi μ. On pose $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{i \leq Z_n} \xi_i^{(n)}$. Soit $m = \mathbb{E}[Z_1]$

– Si $m \leq 1$ Z_n stationne en 0 presque sûrement

– Si $m > 1$ $\mathbb{P}[\liminf Z_n \geq 1] > 0$.

prop 47 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et f cv deux fois différentiable en $a \in U$ et $Df(a) = 0$ alors f admet un minimum global sur U.

2) Espaces L^p

Lemme 48 Soient $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\beta + \alpha = 1$ et soient $u, v \in [0, \infty]$

Alors $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$

prop 49 Inégalité de Hölder Soient p et q deux exposants conjugués, $1 < p, q < \infty$, et f, g mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$, alors $\int_X fg\, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$

prop 50 Inégalité de Minkowski avec les mêmes hypothèses

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$$

corollaire 51 Pour $1 \leq p < \infty$, l'ensemble $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur cet espace vectoriel

Références : J.P Ramis "Tout-en-un pour la licence L2"

F. Clarke "Function Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control"

Rouvière "Petit Guide de ..."

J.E Rombaldi : "Éléments d'analyse réelle"

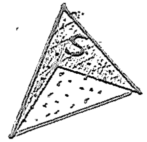
FGN Analyse 1

J. Faraut "Calcul intégral" et H. Brézis "Analyse fonctionnelle"

DEV 2

Ref : Benaim El Karoui "Promenade aléatoire"

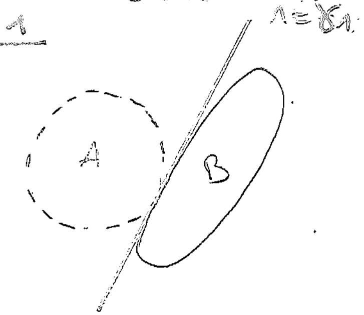
A est convexe mais pas B



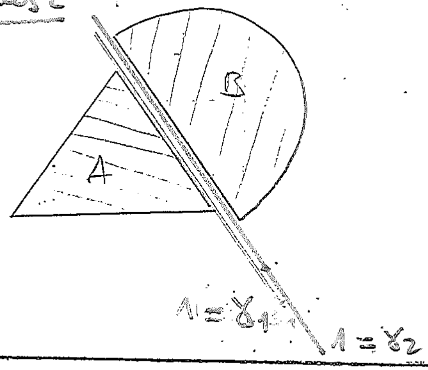
Conv(S)

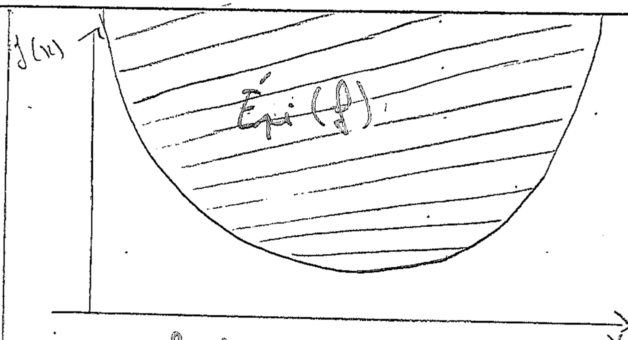
Hahn-Banach :

Cas 1

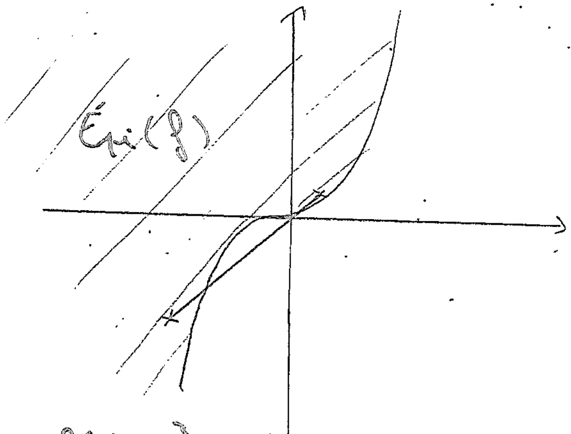


Cas 2

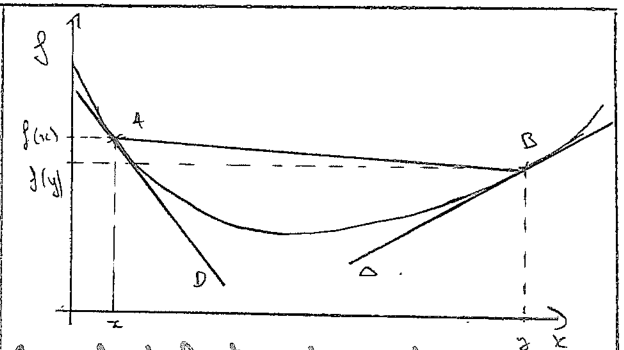




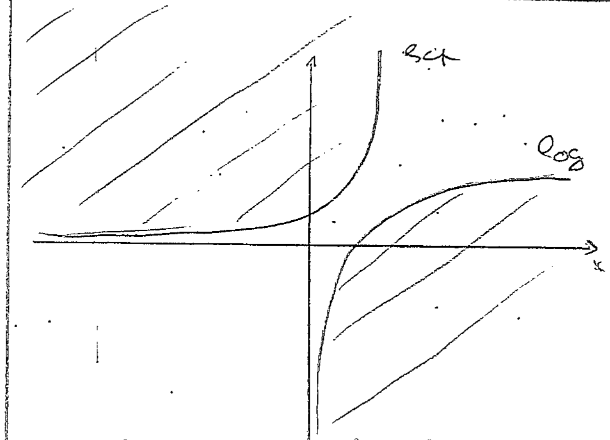
f est convexe



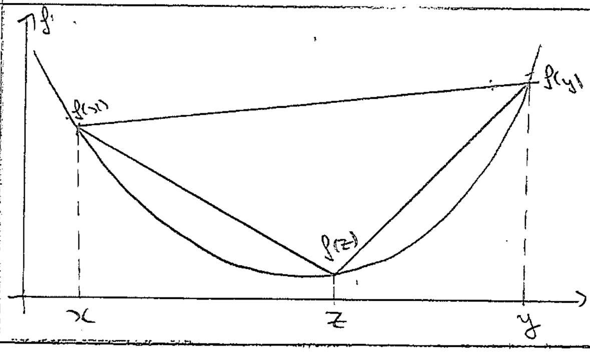
$f(x) = x^3$ n'est pas convexe



la courbe de f est au dessus de ses tangentes



la fonction exponentielle est convexe et la fonction log est concave.



$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

la courbe de f est en dessous de ses cordes

Théorème de Hahn-Banach géométrique

Réf : <u>Brézis</u> Analyse fonctionnelle
<u>Clarke</u> Functional analysis.

<u>Théorème</u> : Soient A et B deux convexes non vides disjoints dans un e.v. X

i) Si A est ouvert, il existe $\Lambda \in X^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda x \leq \gamma \leq \Lambda y$ $\forall x \in A, y \in B$

ii) Si A est compact et B fermé alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in A$, $\forall y \in B$: $\Lambda x \leq \alpha - \varepsilon$ et $\Lambda y \geq \alpha + \varepsilon$

Admis : prolongement de Hahn-Banach

<u>Démo</u>

Soit $C \subset X$ un ouvert convexe tel que $0 \in C$. On définit alors la jauge de C

$p(x) = \inf \{ \alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C \}$ pour tout $x \in E$

<u>Lemme</u> :

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$

2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$

3) $C = \{ x \in E : p(x) < 1 \}$

<u>démo du lemme</u> :

1) clair.

3) $\Rightarrow$ Si $x \in C$, C est ouvert donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit $x(1+\varepsilon) \in C$

donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$

$\Leftarrow$ Si $p(x) < 1$ $\exists\, 0 < \alpha < 1$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$ donc $x = \alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha) 0 \in$

2) Si $x, y \in E$, Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}$ et $\frac{y}{p(y)+\varepsilon}$ sont dans C

donc $\frac{t x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t) y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ pour tout $t \in [0,1]$

pour $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ on a $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$ donc $p(x+y) \leq p(x)+p(y)+2\varepsilon$

en faisant tendre ε vers 0 on a le résultat voulu.

Démor dun 1)

Fixons $\bar{x} \in A$ et $\bar{y} \in B$ Soit $z = \bar{x} - \bar{y}$

posons $C = A - B + z$. C est un convexe ouvert ($\bigcup_{y \in B} (A - y + z)$) qui contient 0

Soit p sa jauge. A et B sont disjoints donc $z \notin C$

On a $p(z) \geq 1$ d'après 3)

On pose $M = \mathbb{R} z$ et f telle que $f(tz) = t$

si $t \geq 0$ on a alors $f(tz) = t \leq t\,p(z) = p(tz)$

si $t < 0$ on a alors $f(tz) = t < 0 \leq p(tz)$

donc $f \leq p$ sur M. D'après le théorème de prolongement de Hahn Banach

il existe $\Lambda \in X^*$ tel que $\Lambda = f$ sur M et que $\Lambda \leq p$ sur X (d'après 1) et 2)

- On a donc $\Lambda < 1$ sur C, or $0 \in C$ donc Λ est borné sur un voisinage de 0, donc Λ est continue.

- Soit $x, y \in A, B$. On a $x - y + z \in C$

$\Lambda(x) - \Lambda(y) + 1 = \Lambda(x) - \Lambda(y) + \Lambda(z) = \Lambda(x - y + z) \leq p(x - y + z) < 1$

d'où $\Lambda(x) < \Lambda(y)$

$\Lambda(A)$ et $\Lambda(B)$ sont des convexes disjoints donc il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$\sup_{x \in A} \Lambda x \leq \gamma \leq \inf_{y \in B} \Lambda y$

Démor dun 2)

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$

pour ε petit $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ (car sinon il existe $(\varepsilon_n) \to 0$, $(x_n) \in A$ et $(y_n) \in B$ tq $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$ et alors on peut extraire ~~...~~ une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers $l \in A$. Ainsi $y_{\varphi(n)}$ converge vers l donc $l \in A \cap B$, absurde.)

Ainsi $\exists\ \Lambda, \alpha$ tel que $\Lambda(x) + \varepsilon \|\Lambda\| \leq \alpha \leq \Lambda(y) - \varepsilon \|\Lambda\|$

Théorème de Bienaymé

<u>Ref:</u> Michel Benaïm - Nicole El Karoui : <u>Promenades aléatoires</u> p 153

<u>Contexte</u> : survie d'un nom de famille, de cellules, études de réactions nucléaires en chaînes etc.

modèle : Soit μ une loi de proba sur $\mathbb{N}$ différente de δ_1

Soit $(\xi_i^{(n)})$ une suite de v.a.i.i.d de loi μ.

On pose : $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)} = \sum_{i\geq 1} 1_{[i \leq Z_n]} \xi_i^{(n)}$

Z_n représente le nombre d'individus que comporte la n-ième génération, et $\xi_i^{(n)}$ le nombre d'enfant du i-ème individu de cette génération

Poson $m = \mathbb{E}[Z_1]$

<u>Théorème</u> : - Si $m \leq 1$ alors l'extinction est presque sûre (Z_n stationne en 0 presque sûrement)

- Si $m > 1$ On a la survie avec probabilité positive :

$\mathbb{P}[\liminf Z_n \geq 1] > 0$

<u>Lemme</u> Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto \mathbb{E}[x^{\xi_i^{(n)}}] = \mathbb{E}[x^{Z_1}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Z_1 = k)\, x^k$.

la fonction génératrice de Z_1. Soit φ_n la fonction génératrice de Z_n

On a alors $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \varphi_{Z_n}(0)$

<u>Démo du théorème</u> :

$\mathbb{P}(\{\text{Extinction}\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\})$ avec $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$

$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{Z_n = 0\})$ car la d'une union croissante est la limite des probas

Supposons le lemme.

- φ est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$ $\varphi'(x) = \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}(Z_1 = n)\, x^{n-1}$

$\downarrow x \to 1$

donc φ admet une dérivée à gauche en 1 qui est m

$\sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}(Z_1 = n) = \mathbb{E}(Z_1) = m$

- φ est croissante convexe car limite de somme de fonctions convexes et croissantes $x \mapsto \mathbb{P}(Z_1 = n)\, x^n$

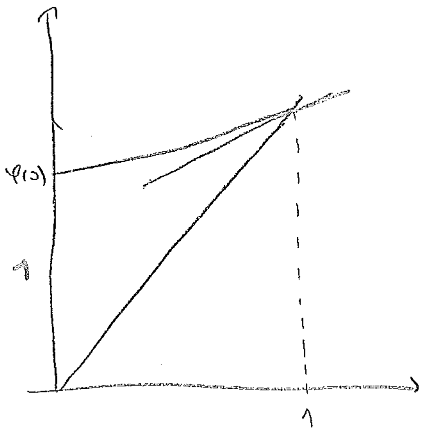
- $\mathbb{P}(\{Z_n = 0\}) = \varphi_n(0) = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}(0)$ donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{Z_n = 0\}) = \mathbb{P}(\{\text{Extinction}\})$

est un point fixe de φ (si cette proba existe)

Si $m \leq 1$ $\varphi \nearrow$ $\Rightarrow \varphi - Id \geq 0$

(car φ est convexe)

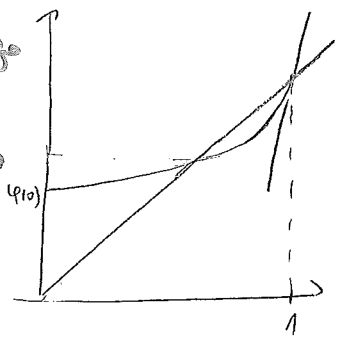
Si il existe $s \in [0,1[$ tel que $\varphi(s) = s$, alors $\varphi - Id$ est nulle en s et en $1 \Rightarrow \varphi - Id = 0$ sur $[s,1]$ (car $\varphi - Id$ est convexe), or $\varphi - Id$ est analytique donc $\varphi - Id = 0$ sur $[0,1]$, absurde car $p_1 \neq 1$.



Ainsi $\varphi > Id$ sur $[0,1[$ donc φ a un unique point fixe 1 et $\varphi^n(0) = \mathbb{P}(\{Z_n = 0\}) \to 1$

Si $m > 1$

Le graphe de φ est sous la diagonale au voisinage de 1 et $\varphi(0) \geq 0$. Par théorème des valeurs intermédiaires $\varphi - Id$ s'annule en un autre point que 1 donc φ a un point fixe différent de 1.



Soit s le plus petit point fixe de φ.

$\forall x \leq s$ $\varphi(x) \leq s = \varphi(s)$ car φ est croissante. Ainsi $[0,s]$ est stable par φ.

$\varphi(0) \in [0,s]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(0) \in [0,s]$. On a donc que le point fixe est la probabilité d'extinction : $\mathbb{P}(\{\text{extinction}\}) = s < 1$

Preuve du lemme :

Par rec : $\varphi_0 : x \mapsto \mathbb{E}[x^0] = \mathbb{E}[1] = 1$

$\varphi_1 = \varphi$

$n \to n+1$

Soit $x \in [0,1]$. $\varphi_{n+1}(x) = \mathbb{E}[x^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}\left[x^{\sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_k 1_{Z_n = k}\, x^{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)}}\right]$

$= \sum_k \mathbb{E}\left[1_{Z_n = k}\, x^{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)}}\right]$ par convergence monotone

$= \sum_k \mathbb{E}[1_{Z_n = k}] \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[x^{\xi_i^{(n)}}]$ par indépendance des $\xi_i^{(n)}$ et de Z_n par construction

$= \sum_k \mathbb{P}(Z_n = k)\, \varphi(x)^k$ car on a la même loi pour les $\xi_i^{(n)}$

$= \varphi_n(\varphi(x))$

□

Leçon 253 : Utilisation de la no° de cvxité en analyse

I. Questions

- Utilisation de la convexité pr localiser les $\sqrt{\ }$ d'un polynome ?
(Lien $\sqrt{\ }$ d'un poly et de sa dérivée)
↳ Dans $\mathbb{C}$ (et donc de $\mathbb{R}$), les racines de la dérivée sont ds l'enveloppe cvxe des $\sqrt{\ }$ du polynome

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

$$(\log(P))' = \left(\sum_{i=1}^{n} \log(X - \alpha_i)\right)' = \sum_{i=1}^{n} (\log(X - \alpha_i))' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_i}$$

$$\beta \text{ tq } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta - \alpha_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\beta - \alpha_i}}{|\beta - \alpha_i|^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta - \alpha_i}{|\beta - \alpha_i|^2} = \bar{0} = 0$$

- "Généralisation" des fonc° cvxe ? (en proba)
↳ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est complètement monotone si f est C^∞ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$
ex : $t \mapsto 1/t$ est cm.