Très bien ☺

246

NOM : LEROUVILLOIS Prénom : Vincent Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Séries de Fourier. Exemples et Applications. n°246

Autre sujet : Réf : Gourdon, Queffélec-Zuily, Farault, FGN n°2, n°4

Notations : $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. $\forall p \in [1,+\infty[$, $L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques / $|f|^p$ est intégrable sur $]0,2\pi[$ pour la mesure de Lebesgue.

Comme on est en mesure finie, $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \supseteq L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \supseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

On munit $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ du produit scalaire hermitien

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,dt.$$

I - Séries trigonométriques et coefficients de Fourier

1) Définitions

Def 1 : Un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ est une fonction de la forme $P : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$ où $c_n, a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Rq 2 : $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = c_n + c_{-n}$, $\forall n \geq 1$ $b_n = i(c_n - c_{-n})$

Prop 3 : L'espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Def 4 : Une série trigonométrique est une série formelle :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),\ c_n, a_n, b_n \in \mathbb{C}.$$

⚠ On ne présume pas de la convergence de cette série.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$, la série trigo. converge dans L^2, complet.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, la série trigo. converge normalement dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Prop 5 : On note $e_n : x \mapsto e^{inx}$. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

$$\langle e_n|e_m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases}$$

Coro 6 : Pour tout polynôme trigonométrique $P = \sum_{-N}^{N} c_n e_n$ on a $c_n = \langle e_n|P\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x) e^{-inx}\,dx$

Ceci est encore vrai pour une série trigo. qui converge dans L^2.

2) Coefficients de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

Def 7 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on appelle coefficients de Fourier de f les $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

La série de Fourier associée à f est la série trigo. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

Def 8 : La somme partielle d'indice N est $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$

Rq 9 :
- Si f est paire, alors $b_n = 0$ $\forall n \geq 1$
- Si f est impaire, alors $a_n = 0$ $\forall n \geq 0$

Exemple 10 :
- (Fonction créneau) Soit f la fonction impaire, 2π-périodique qui vaut $\frac{\pi}{2}$ sur $]0,\pi[$ et $f(0) = f(\pi) = 0$ alors $a_n(f) = 0$, $b_{2n}(f) = 0$ et $b_{2n+1}(f) = \frac{2}{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (Fonction triangle) Soit g la fonction paire, 2π périodique qui vaut $\frac{\pi}{2} - x$ sur $[0,\pi]$. alors $a_{2n}(f) = 0$, $a_{2n+1}(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ et $b_n(f) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

voir annexe 1

Rq 11 : Une série trigo qui converge dans L^2 est égale à sa série de Fourier. On peut donc utiliser le développement en série entière pour trouver les coefficients de Fourier.

Exemple 12 :
- $f(x) = e^{e^{ix}}$ $c_n(f) = \frac{1}{n!}$ $\forall n \geq 0$, $c_n(f) = 0$ si $n \leq -1$
- $g(x) = \frac{1}{2 - e^{ix}}$, $c_n(g) = \frac{1}{2^{n+1}}$ $\forall n \geq 0$, $c_n(g) = 0$ si $n \leq -1$

1/4

Prop 13 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f\in L^1([a,b],Leb)$

Alors $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt=0$

Coro 14: $\forall f\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $\lim_{n\to\infty}c_n(f)=\lim_{n\to\infty}a_n(f)=\lim_{n\to\infty}b_n(f)=0$

Def 15: - Si $f\in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $g\in L^q(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on peut définir la convolée de f et g : $f*g : x\longmapsto\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(x-t)dt$. On a $\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_p\|g\|_q$

- Si $f,g\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on peut définir $f*g$ dans $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. On a $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1$.

Prop 16: Soit $f,g\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $\forall n\in\mathbb{Z}$ $c_n(f*g)=c_n(f)\times c_n(g)$

Coro 17: $\mathcal{F}:\begin{cases}(L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),+,\cdot,*)\longrightarrow(c_0,+,\cdot,\times)\\ f\longmapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\end{cases}$ est un morphisme d'algèbre

où c_0 est l'ensemble des suites complexes de $\mathbb{Z}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$.

$\hookrightarrow$ $S_N(f)$ converge-t-elle quand $N\to+\infty$? En quel sens ? Vers quelle limite ?

II - Convergence des séries de Fourier en moyenne quadratique

1) Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Def 18: $D_N=\sum_{n=-N}^{N}e_n$ est le noyau de Dirichlet. $\forall f\in L^1$, $S_N(f)=f*D_N$

Prop 19: $\forall N\in\mathbb{N}$, D_N est paire, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)dt=1$ et $D_N(x)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

Def 20: $K_N=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n$ est le noyau de Féjer. $\forall f\in L^1$ $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n(f)=f*K_N$

Prop 21: $\forall N\in\mathbb{N}$, K_N est paire, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)dt=1$ et $K_N(x)=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$

donc $K_N\geq 0$. De plus, $\forall 0<\delta\leq\pi$, $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_N(t)dt=1$

Coro 22: $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite d'approximation de l'unité

Thm 23 (Féjer) - Si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ alors $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n(f)\xrightarrow[N\to+\infty]{\|\ \|_\infty}f$

- Si $f\in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ $p<+\infty$, alors $\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n(f)\xrightarrow[N\to+\infty]{\|\ \|_p}f$

Corollaire 24: L'espace des polynômes trigo. $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),\|\ \|_\infty)$ et dans $(L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),\|\ \|_p)$.

Corollaire 25: $\mathcal{F}: L^1\longrightarrow c_0$ est injective.

2) Cadre Hilbertien : $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

Rappel: $(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),\langle|\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Prop 26: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

- libre
- orthonormée
- "presque gén." : tt élt s'écrit en une série en ce vect.

(gén = comb. li = finie)

Prop 27: Si $f\in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $S_N(f)$ est la projection orthogonale sur le sous-espace de polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Thm 28: (Egalité de Parseval)

$\forall f\in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $S_N(f)\xrightarrow[N\to+\infty]{\|\ \|_2}f$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2=\|f\|_2^2$

Coro 29: $\mathcal{F}_{|L^2}:\begin{cases}L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\longrightarrow\ell^2(\mathbb{Z})\\ f\longmapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\end{cases}$ est une isométrie bijective.

$$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\simeq\ell^2(\mathbb{Z})$$

3) Premières applications

Appli 30: A l'aide de l'exemple 10 (fonction triangle) : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Appli 31: (Inégalité de Wirtinger) Si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $\int_0^{2\pi}f(t)dt=0$ alors $\|f\|_2\leq\|f'\|_2$ avec égalité ssi $f(t)=a\cos t+b\sin t$, $a,b\in\mathbb{C}$

Appli 32: - Soit $f\in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $\tau_\alpha : x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\longmapsto x+\alpha\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ alors $f\circ\tau_\alpha=f$ p.p. $\Rightarrow$ f est constante p.p.

Coro 33: La mesure de Lebesgue sur le cercle est ergodique pour les rotations irrationnelles

III - Convergence ponctuelle et uniforme

Def 34: f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux ($f \in \mathcal{C}^k_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$) s'il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = 2\pi$ / $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est $\mathcal{C}^k$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$

1) Théorème de Dirichlet, convergence ponctuelle :

Thm 35: (Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}^0_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{h}$ est borné au voisinage de 0.

Alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

Appli 36: On applique Dirichlet à $f(t) = \dfrac{\sin(t/2)}{t}$, et $x_0 = 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$

Coro 37: Si $f \in \mathcal{C}^1_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Appli 38: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (utiliser l'exemple 10, (fonction triangle) évaluée en 0).

Appli 39: En calculant les coeffs de Fourier de f impaire, 2π-périodique / $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ sur $[0, \pi]$, et appliquant Dirichlet en x, $\forall x \in]0, 2\pi[$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$

DEV 1

Contre-exemple 40: En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus, on montre qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dont la série de Fourier diverge.

2) Convergence pour des fonctions plus régulières

Thm 41: Si $f \in \mathcal{C}^{k-1} \cap \mathcal{C}^k_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$

Coro 42: Si $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $S_N(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{\|\ \|_\infty} f$

Rq 43: En utilisant la densité des fonctions affines par morceaux dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ cela donne une autre preuve de la densité des polynômes trigonométriques.

Exemple 44: (Phénomène de Gibbs) Soit f la fonction créneaux de l'exemple 10 alors $S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mais $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \max_{x \in \mathbb{R}} S_N(f)(x) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{2}$

Vraisemblance 2

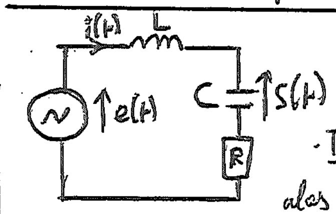
3) Régularité de f et décroissance à l'infini des $c_n(f)$.

Prop 45:
- Si $f \in \mathcal{C}^{k-1} \cap \mathcal{C}^k_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $c_n = o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$
- Si $c_n = O\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ alors $f \in \mathcal{C}^{k-2}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ pour $k \geq 2$

Coro 46: $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \iff (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in S_0 = \left\{ u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} / \forall k \in \mathbb{N}\ u_n = o\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right) \right\}$

IV - Applications

1) Traitement du signal en Physique et résolution d'équa. diffs. linéaires.



$LC \dfrac{d^2 s}{dt^2} + RC \dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$

Thm 47: Si $e(t) \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{p.m}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $s(t) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n(e)}{(1 - n^2 LC) + inRC} e^{int}$ est solution.

2) Résolution de l'équation de la chaleur sur le cercle

Thm 48: Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui vérifie :
i) $\partial_t u = \partial_x^2 u$ $\forall t > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (Equation de la chaleur)
ii) $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \to 0]{\|\ \|_2} u_0$

De plus, u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ~~cst~~.

anneau métallique

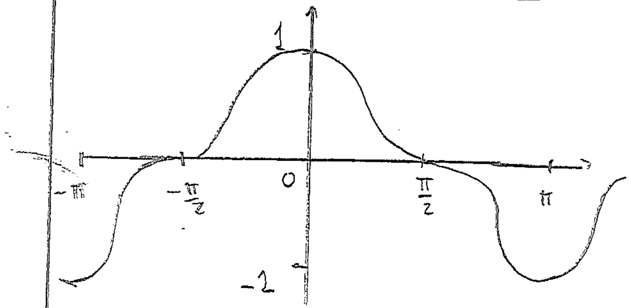
DEV 2

bsp de dériv. pont.

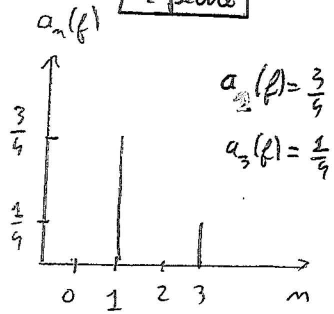
- analyse : trouver l'expr. des coeff de Fourier
- synthèse : vérifier que c'est bien sol°
- mq $\mathcal{C}^\infty$: majoration $\in \ell^1(\mathbb{Z})$ + thm de dériv° terme à terme

Annexe 1 : Exemple de décomposition en Séries de Fourier

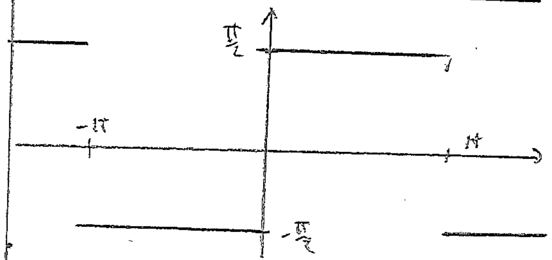
$f(x) = \cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{4}$

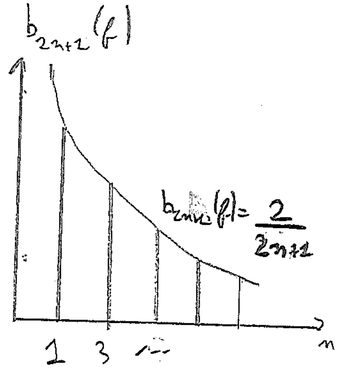


$\boxed{\text{Spectre}}$

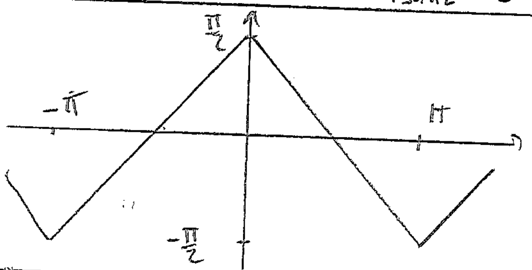


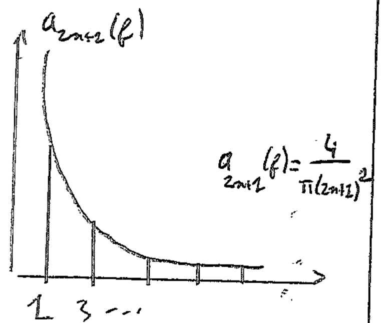
Fonction créneau : f impaire, $f_{|]0,\pi[} = \frac{\pi}{2}$





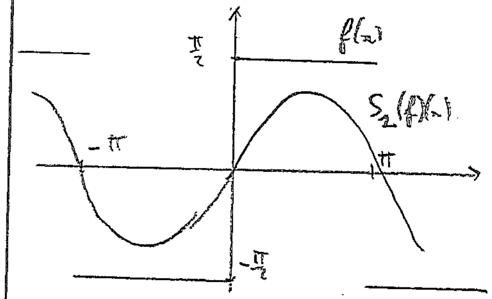
Fonction triangle : f paire $f_{|]0,\pi[} = \frac{\pi}{2} - x$

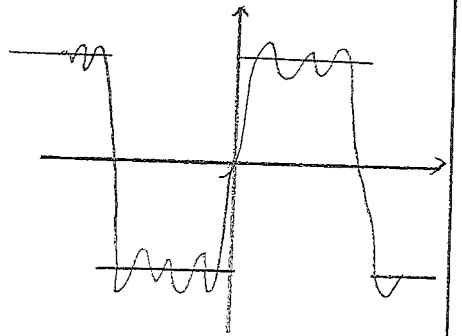


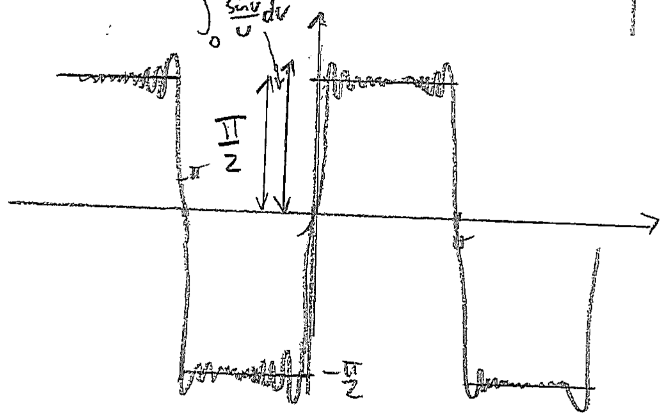


Annexe 2 : (Phénomène de Gibbs)

f la fonction créneau : f impaire, $f_{|]0,\pi[} = \frac{\pi}{2}$







$$\max_{x \in \mathbb{R}} S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v}\,dv \simeq 1,8519 > \frac{\pi}{2}$$

L'amplitude d'oscillations des sommes partielles reste supérieure au saut de discontinuité de la fonction.

Leçon 246. Séries de Fourier. Exemples et applications.

I) Défense de plan.

à dilata° près on s'y ramène pr ttes les fonc° pér.

$$L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \supseteq L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \supseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \supseteq \mathcal{P}$$

↑ cadre le + gnal.

$P = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ poly. trigo.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-int}\,dt$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$$S_N(f) = \sum_{-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$$

$S_N(f) \xrightarrow{?} f$

CLA question de la leçon.

II) Questions dév 2.

- Pourquoi (i) est l'équa° vérifiée par la chaleur ?
- Pourquoi l'IPP marche ? (ds l'analyse)
- Vraiment Plancherel utilisé ? (fin de l'analyse)
  ↳ isométrie L^2 : Parseval (équiv de plancherel pr les séries de F).
- Pourquoi hyp. (ii) et pas $u(0,x) = u_0$?
  ↳ condi° initiale u_0 pas assez régulière.
  exple ? : on place 2 sources de chaleurs sr un anneau "sauts" de température à l'instant initial

III) Questions plan.

- Qu'est ce que ça veut dire d'avoir les coeff $b_{2n} = 0$?
- Lemme de Riemann-Lebesgue. Dém ? (prop 13)
  ↳ densité des fonc° en escalier ds L^1 en norme 1 sr (a,b)
- Lemme de Riemann-Lebesgue. Appli ? (prop 13)

↳ ex : thm de Dirichlet (thm 35) qui a lui-m bcp d'appli

- Thm de Dirichlet. Dém ? (thm 35)
- Égalité du thm 28. Dém ? (thm 28)
- C'est quoi une projec° orthogonale ?
- Inégalité de Wirtinger. Dém ? (appli 31).
- Appli 36. Dém ? (appli 36).
- Phénomène de Gibbs. Qu'est ce que ça dit ? (exple 41).

↳ l'amplitude des oscilla° reste tjs + gde que la discontinuité (cf annexe 2)

IV Exercices

$\boxed{1}$ Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$

~~$\sin^2(n) = \frac{1-\cos(2n)}{2} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(2n)}{2n^2}$~~

~~$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^2}\right)$~~

Retour sur l'appli 39.

On pose $g(x) = f(x+1) + f(x-1)$

$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+1)e^{-inx}\,dx + \dots$

$u = x+1 \longrightarrow \; = \frac{e^{in}}{2\pi}\int_1^{2\pi+1} f(u)e^{-inu}\,du + \dots$

$= (e^{in} \pm e^{-in})\, c_n(f)$.

Dém, $b_n(g) = (e^{in} \pm e^{-in})\, \overbrace{b_n(f)}^{\leftarrow\, d/n} = \frac{2i\sin(n)}{n}$

on a envie de prendre

et $a_n(g) = 0$

Puis égalité de Parseval : ...

2) Formule sommatoire de Poisson

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. fonc° à décroissance rapide
↖ espace de Schwarz

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x)\,dx$$

Mq $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

V) Commentaires leçon

- Très bien
- ⚠ aux interpréta° φ ds cette leçon.
- 2 bémols (petits) :
  * Réponse à Riemann-Lebesgue. Passer par $\mathcal{C}^2$ cf cours anal. Escaliers pas naturels ds la théorie de l'int. de Lebesgue. Plusieurs démo. possibles
  * Manque de cohérence ds les notations. $c_k, c_n, S_n, S_N, D_N, \mathcal{C}^k$...
- Traiter Dirichlet avt Parseval : correspond à l'histoire & à cmt on l'apprend. Ms on peut faire autrement.

VI) Pour faire autrement

On s'intéresse aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique (à choisir)

$\hat{f}(k) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt$.

But : Relier $\sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k$ à f où $e_k : t \mapsto e^{ikt}$

Cadre le + gral ds lequel on peut définir : $L^1(]0, 2\pi[, dt/2\pi)$.

Mais on ne peut rien dire ☹ → on va restreindre l'espace :

mesure/inc. → $\underbrace{L^1 \supset L^p \supset L^\infty \supset \mathcal{C}^0_{2\pi} \supset \mathcal{C}^r_{2\pi}}_{\text{Banachs} \supset \text{denses}} \supset \mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ ← Fréchet Montel (pas normalisable)

Topologies

1) $L^1 \to c_0^\infty(\mathbb{Z})$. Riemann-Lebesgue → 0

(dém : utiliser la densité des fonc° $\mathcal{C}^2$
$f\ \mathcal{C}^2$, $\widehat{f - f''}(k) = (1+k^2)\hat{f}(k)$. $\hat{f}(k) \leq \dfrac{\|f - f''\|_1}{1+k^2}$ IPP
(on pourrait aussi faire avec $f\ \mathcal{C}^1$ et m̄ chose ms en $1/k$, identique))

2) $p=2$. e_n ON. $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ $\sum_{n=-n}^{n} \hat{f}(n) e_n \xrightarrow{L^2} \pi_F(f)$

$F = \overline{\mathrm{Vect}(e_n)} = L^2$

Si on admet que les poly trigo sont denses ds L^2 (ie $\overline{\mathrm{vect}(e_n)} = L^2$), alors $f \longmapsto \hat{f}$ est une isom. Parseval

3) $\mathcal{C}^0_{2\pi}$. Fejer. $\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$

. densité $\mathcal{C}^0$ ds L^2
. cvgce unif mesure $\Rightarrow$ cvgce L^2

poly trigo $\Rightarrow (e_n)$ base hilbertienne

Banach-Steinhaus : marche pas sans Cesaro (φ c-ex tol)

4) $\mathcal{C}^0$

- Dirichlet $\mathcal{C}^1$ par morceaux, disc. $S_n(x) \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

$\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\mathcal{C}^0$ $S_n(x) \to f(x)$

$\mathcal{C}^1$

$\mathcal{C}^r$ régularité $\longleftrightarrow$ décroissances des $\hat{f}(k)$ + rapides

$\mathcal{C}^\infty$ décroissance rapide

Analogies possibles av les transformée de Fourier ($\mathcal{S}$).

VII (Autres) exples et applica°

- Formule sommatoire de Poisson.
- Résolu° d'équa diff
- Résolu° d'EDP (eg. éq° de la chaleur)
- Inégalité isopérimétrique (Zuily-Queff.)
- Ergodicité de la rota° irrationnelle