

NOM : MARTY

Prénom : Théo

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse N° 243

Sujet choisi : Convergence des séries entières, propriétés de la

Autre sujet : somme. Exemples et applications.

Exemple 7:

$$\exp(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, R = 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, R = 1$$

$$R\left(\sum_{n \geq 0} n! z^n\right) = 0$$

Proposition 8: $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}$

Exemple 9: On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 3^n$, alors $R(\sum a_n z^n) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Proposition 10: $R(\sum a_n z^n) = R(\sum n a_n z^n)$

C) Opérations

Définition 11:

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$. On définit la somme et le produit de f et g respectivement par

$$(f+g)(z) = \sum (a_n + b_n) z^n$$

$$(fg)(z) = \sum_n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

Propriété 12:

$$R(f+g) \geq \min(R(f), R(g))$$

$$R(fg) \geq \min(R(f), R(g))$$

I. Généralités

A) Définitions

Définition 1: Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Lemme 2: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Exemple 3: $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$. (1^n) est bornée

donc $\forall |z| < 1$, $f(z)$ converge vers $\frac{1}{1-z}$.

Définition 4: Soit f la somme d'une

série entière $\sum a_n z^n$. On appelle rayon de convergence de f le réel :

$$R(f) := \sup \{ r \geq 0, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

Proposition 5: Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

- si $|z| < R(f)$, $f(z)$ converge absolument.

- si $|z| > R(f)$, $f(z)$ diverge.

B) Calcul de R

Proposition 6:

- si $a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$, alors

$$R(f) = \frac{1}{\lambda}$$

- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0, +\infty]$, alors $R(f) = \frac{1}{\lambda}$

Ref: Gourdon : Analyse

Zuily-Queffelec : Éléments d'analyse pour l'agrégation
Cours de Proba L3

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

DN1

Exemple 17:

$$-\exp'(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} z^{n-1} = \exp(z) \text{ pour } z \in \mathbb{C}$$

$$-\ln'(1-z) = \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{n}\right) z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \text{ pour } |z| < 1$$

$$-\text{si } f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ pour } |z| < 1,$$

$$z f'(z) = \sum_{n \geq 0} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Corollaire 18: Si $f(z) = \sum a_n z^n$, alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Exercice 19: Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ non nuls et premiers entre eux dans leur ensemble. Soit $S_n = \# \{ (\alpha_1 - \alpha_2) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^p \alpha_i \alpha_i = n \}$. Trouver un équivalent de S_n .

Proposition 20: $[z \mapsto \sum a_n z^n]$ admet comme primitive sur $D(0, R)$ $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Théorème 21: des zéros isolés.

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $(z_0) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ tel que $R(z_0) > 0$, $f(z_0) = 0$, et $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Proposition 22: Soit $f = \sum a_n z^n$ tel que $R(f) > 0$, et $n \in]0, R[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\pi i \int_0^n a_n dz = \int_0^{2\pi i} f(ne^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

Et sur $D(0, R)$ ou $R = \min(R(f), R(g))$,

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(fg)(z) = f(z) \times g(z)$$

Exemple 13: $\forall |z| < 1$, $\exp(z) + \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \left(1 + \frac{1}{n!}\right) z^n$

$$\text{et } \exp(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) z^n$$

Proposition 14: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $a_0 \neq 0$.

Alors il existe $g(z) = \sum b_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ tel que $fg = 1$.

II Régularité

A) Sur $B(0, R)$

Proposition 15: Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Alors $\forall n \in [0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$.

Proposition 16: $[z \mapsto \sum a_n z^n]$ est continue sur $D(0, R)$. Elle est dérivable de dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ (au sens $\mathbb{C}$ -dérivable ou dérivable sur $] -R, R[$), et est $\mathcal{C}^\infty$.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

DV2

III Application à d'autres théories

A) Analyse complexe

Théorème 27:

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert régulier et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{C}$ -dérivable. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ $\left(\gamma = \text{holomorphe} \right)$

Définition 28:

Soit $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. f est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U .

Théorème 29:

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. f est analytique si elle est $\mathbb{C}$ -dérivable sur U .

B) Fonction caractéristique en proba

Définition 30:

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On définit $\phi_X(\lambda) = E[e^{i\lambda X}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) e^{i\lambda n}$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Elle caractérise la loi de X .

Théorème 31: de Bienaymé.

Soit (Z_n) un processus de branchement de Galton Watson de loi $\mu \neq \delta_1$ et $Z_0 = 1$. Alors $(P(\text{survie}) > 0) \Leftrightarrow (\sum_{k=0}^{\infty} k p(k) > 1)$

Exemple 22: Si $R(f) = +\infty$ et f est bornée alors f est constante.

B) Sur $\overline{D}(0, R)$

Exemple 23:

- $\sum z^n$ diverge si $|z|=1$
- $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge en $z=1$ et converge en $z=-1$
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge pour tout $|z|=1$

Théorème 24: (Abel)

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $f_0 \in \mathbb{C}$. On suppose $R(f) \in]0, +\infty[$, $|f_0| = R$ et que f converge en f_0 .

Soit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\rho \in [0, 2 \cos \varphi[$ et $\Delta(\rho, \rho, \varphi) = \{z \in \overline{D}(0, R), \exists n \in [0, \rho], \theta \in [-\varphi, \varphi], z = 1 - n e^{i\theta}\}$.

Alors f converge uniformément sur $\Delta(\rho, \rho, \varphi)$. En particulier $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow f_0} f_0$ $\forall \delta \in \mathbb{R}$

Exemple 25: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

Exercice 26: Pour tout $t \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

Théorème de Bienaymé

Processus de branchement de Galton Watson.

Soit $(\xi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi $\mu \neq \delta_1$. $Z_0 = 1$. Alors Z_{n+1} a la même loi que $\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{k,n}$. On peut les supposer égales.

Soit $m := \sum_{k \geq 0} k \mu(k) = \mathbb{E}[\xi_{1,1}]$.

$$P(\text{survie}) = P(\forall n, Z_n > 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \neq 0).$$

Lemme: On pose $g = \varphi_\xi$ et $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$. Alors $\varphi_n = g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_n$.

Démonstration: Par récurrence sur $n \geq 1$.

$$n=1: \varphi_1(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_{1,1}}] = \varphi_g(s)$$

$$n \rightarrow n+1: \varphi_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{k,n}}\right] = \sum_{p \geq 0} P(Z_n = p) \mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^p \xi_{k,n}}\right]$$

$$\text{or } \mathbb{E}\left[s^{\sum_{k=1}^p \xi_{k,n}}\right] = \prod_{k=1}^p \mathbb{E}[s^{\xi_{k,n}}] = g(s)^p$$

$$\text{Donc } \varphi_{n+1}(s) = \sum_{p \geq 0} P(Z_n = p) g(s)^p = \varphi_{Z_n}(g(s)) = g^{n+1}(s)$$

D'où par récurrence $\varphi_n = g^n$ pour tout $n \geq 1$.

$$P(Z_n = 0) = \varphi_n(0), \text{ donc on cherche } \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(0).$$

notons que $(Z_n = 0) \Rightarrow (Z_{n+1} = 0)$, donc $(g^n(0))_n$ est croissante.

Théorème de Bienaymé

Processus de branchement de Galton Watson.

Soit $(\xi_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi $\mu \neq \delta_1$. $Z_0 = 1$. Alors Z_{n+1} a la même loi que $\sum_{h=1}^{Z_n} \xi_{h,n}$. On peut les supposer égales.

$$\text{Soit } m := \sum_{h \geq 0} h \mu(h) = \mathbb{E}[\xi_{1,1}].$$

$$\mathbb{P}(\text{survie}) = \mathbb{P}(\forall n, Z_n > 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \neq 0).$$

Lemme: On pose $g = \varphi_\xi$ et $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$. Alors $\varphi_n = g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_n$.

Démonstration: Par récurrence sur $n \geq 1$.

$$n=1: \varphi_1(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_{1,1}}] = \varphi_g(s)$$

$$n \rightarrow n+1: \varphi_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left[s^{\sum_{h=1}^{Z_n} \xi_{h,n}}\right] = \sum_{p \geq 0} \mathbb{P}(Z_n = p) \mathbb{E}\left[s^{\sum_{h=1}^p \xi_{h,n}}\right]$$

$$\text{or } \mathbb{E}\left[s^{\sum_{h=1}^p \xi_{h,n}}\right] = \prod_{h=1}^p \mathbb{E}[s^{\xi_{h,n}}] = g(s)^p$$

$$\text{Donc } \varphi_{n+1}(s) = \sum_{p \geq 0} \mathbb{P}(Z_n = p) g(s)^p = \varphi_{Z_n}(g(s)) = g^{n+1}(s)$$

D'où par récurrence $\varphi_n = g^n$ pour tout $n \geq 1$.

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \varphi_n(0), \text{ donc on cherche } \lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(0).$$

notons que $(Z_n = 0) \Rightarrow (Z_{n+1} = 0)$, donc $(g^n(0))_n$ est croissante.

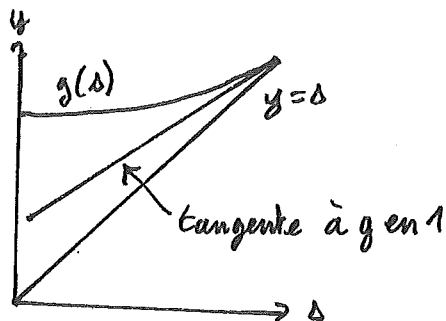
DV2 suite

pour tout $s \in [0, 1]$, $g(s) = \sum_{k \geq 0} p(k) s^k$

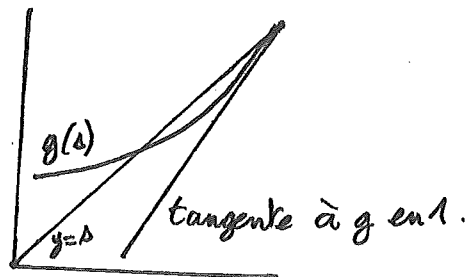
$$\text{Donc } g'(s) = \sum_{k \geq 0} k p(k) s^{k-1} \geq 0$$

$$g''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) p(k) s^{k-2} \geq 0$$

Donc g est croissante et convexe, donc g est au dessus de ces tangentes.



si $m \leq 1$



si $m < 1$

Si $m \leq 1$, on montre que 1 est l'unique point fixe de g .

En effet si $\exists s_0 < 1$, $g(s_0) = s_0$, alors $g - \text{Id}$ est convexe et positive (car $g(s) \geq 1 - m(1-s)$) et nulle en s_0 et 1, donc nulle sur $[s_0, 1]$. Par théorème des zéros isolés, $g - \text{Id} = 0$, et $\mu = \delta_1$, ce qui est faux. Donc 1 est l'unique point fixe de g , et $g^n(0)$ converge vers 1. $\mathbb{P}(\text{survie}) = 0$

Si $m > 1$, $g(1-x) + x = 1 - (m-1)x + o(x)$ donc $\exists s \in [\frac{1}{2}, 1[$, $g(s) < s$. Or $g(0) > 0$, donc par théorème de valeurs intermédiaires, g admet un second point fixe $q \in]0, 1[$. $\forall s \in [0, q]$, $0 \leq g(0) \leq g(s) \leq g(q) = q$ donc $g(s) \in [0, q]$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(0) \in [0, q]$, d'où $\mathbb{P}(\text{survie}) > 0$

DV1 suite

On développe $\frac{1}{(1-z)^k}$ en série entière:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \times \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{w^{n+1}} \quad \text{pour } |z| < |w|$$

$$\text{En dérivant, } \frac{(k-1)!}{(w-z)^k} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k-1)!}{n!} \frac{z^n}{w^{n+k}}.$$

Par théorème des zéros isolés, S_n est égal au n -ième terme du développement en série entière de $\frac{A}{(1-z)^p}$ plus celui de $G(z)$.

$$\text{Dans } G: \quad \frac{a_{k,w}}{(w-z)^k} = \frac{a_{k,w}}{(k-1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k-1)!}{n!} \frac{z^n}{w^{n+k}} \quad \text{pour } |w|=1 \text{ et } |z| < 1 \text{ et } k \leq p-1$$
$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= O(n^{p-2})}$$

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{(n+p-1)!}{n!} z^n$$
$$\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\sim n^{p-1}}$$

$$\text{Donc } S_n \sim \frac{1}{\prod_{i=1}^p \alpha_i} \times \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Décomp. en élt's simples:

$$\frac{P}{Q}, \quad \deg P < \deg Q \quad \frac{P}{Q} = \sum_{\substack{w \in \text{zer } Q \\ \text{et } m_w}} \frac{a_{w,k}}{(w-X)^k} \quad a_{w,k} \in \mathbb{C}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^p$ non nuls et premiers entre eux dans leur ensemble.

$$S_n = \# \left\{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^p a_i \alpha_i = n \right\}$$

Calculer un équivalent de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Lemme: $\sum_{n \geq 0} S_n z^n = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_i}}$ pour $|z| < 1$

Démonstration: $S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_p) := \# \left\{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p, \sum_{i=1}^p a_i \alpha_i = n \right\}$

Alors $S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{a_p=0}^{E(\frac{n}{\alpha_p})} S_{n - a_p \alpha_p}(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{pour } k = \alpha_p a_p}}^n \mathbb{1}_{\alpha_p | k} S_{n-k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$

Or $\sum_{\substack{k=0 \\ \text{pour } k = \alpha_p n}} \mathbb{1}_{\alpha_p | k} z^k = \sum_{n \geq 0} z^{\alpha_p n} = \frac{1}{1 - z^{\alpha_p}}$

petit de Cauchy

Donc $\sum_{n \geq 0} S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_p) z^n = \frac{1}{1 - z^{\alpha_p}} \sum_{n \geq 0} S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) z^n$ par produit

de Cauchy. Puis par récurrence, $\sum_{n \geq 0} S_n z^n = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_i}}$ pour $|z| < 1$.

Application du lemme. Soit $F(z) = \sum_{n \geq 0} S_n z^n = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 - z^{\alpha_i}}$.

$F(z)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont 1 d'ordre p et $\exp\left(\frac{2ikh\pi}{\alpha_j}\right)$, pour $j \in \{1, \dots, p\}$ et $k \in \{1, \dots, \alpha_j - 1\}$, d'ordre au plus $p-1$, car les $(\alpha_i)_i$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

On décompose F en éléments simples: il existe G de la

forme $G(z) = \sum_{w \in \Pi} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_{k,w}}{(w-z)^k}$ avec $\Pi = \left\{ \exp\left(\frac{2ikh\pi}{\alpha_j}\right), 1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq \alpha_j - 1 \right\}$

et $a_{k,w} \in \mathbb{C}$, et $A \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $|z| < 1$, $F(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + G(z)$

Alors $(1-z)^p F(z) = A + (1-z)^p G(z) = \prod_{i=1}^p \left(\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} z^k \right)^{-1}$

Donc en évaluant en $z=1$, $A = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\alpha_i}$

Bel (con. cas)
Abd (régulière) (con)
dér.

Leçon n° 243

Cycle des séries entières
Prop de la somme
Expos et applica°

I

Questions

- Précisions sur le dt
- Exemple 3 : les 2 critères ne s'appliquent pas.
↳ D'Alembert et Cauchy lequel est le + fort ?
S'appliquent-ils fr ? ?
- Opérations Σ , Π et composition ?
f série entière $D(0, R) \rightarrow D(0, R)$ et g série entière $D(0, R')$ se
gof ?
- Prop 46 (dérivable) repose sur quoi ?
- Thm 21 (théorème inverse) : Pourquoi nom et pourquoi de régularité ?
- Exercice 26

II

Exercices

- Dér en série entière de $\text{Arctan}(x+a)$, a est
- dérivable. $(a_n, b_n, \dots)$
- $1 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (x+a)^{2n} \dots$
 $1 + (x+a)^2$
Puis intégrer et évaluer en 0 pr le terme est

III

Rap

- Avantages : domaine sup. limité en prépa
- Inconvénients :
↳ calcul diff. variable $\mathbb{C}$,
Rapport frq : régularité de l'improvisation sur la variable complexe

variable $E \rightarrow$ composition

- Autre chose permettant de sortir du pg. de prep :

$$\text{généraliser: } \frac{1}{1-x} = \sum g^k$$

$$u \in \mathcal{D} \quad \forall u \in \mathcal{D} \quad (u \cdot u)^{-1} = \sum u^k$$

$$+ u \cdot u = \mathcal{E}$$

(théorème)

$u: E \rightarrow F$ inversible. Banach

$$D\varphi(u) \cdot h = \underbrace{F \rightarrow E}_{F \rightarrow E} \underbrace{E \rightarrow F}_{E \rightarrow F} \underbrace{F \rightarrow E}_{F \rightarrow E}$$

↑
Inversion

$$\in \mathcal{L}(F, E)$$

$$\varphi: \text{covet}(\mathcal{L}(E, F)) \rightarrow \mathcal{L}(F, E)$$

$$b \in \mathcal{L}(E, F)$$