- FGN Analyse I (exemples et exercices)
- Gourdon, Analyse (échelles de comparaisons, DL)
- Dieudonné, Calcul infinitésimal (tout le reste)

NOM : PHOMMADY Prénom : Kenny Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

Autre sujet :

Remarque 1 : Toute étude de fonction au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ peut se ramener à une étude en $+\infty$, et vice versa.

Dans la suite, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f est une fonction définie au voisinage de a (sous-entendu voisinage épointé si $a \in \mathbb{R}$).

I Définition d'un développement asymptotique

1) Échelle de comparaison

Définition 2 : Une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est une famille de fonctions définies au voisinage de a telles que :

- $\forall \varphi \in \mathcal{E}$, $\varphi(x) \underset{x \to a}{\not\to} 0$
- la relation de négligeabilité est une relation d'ordre total sur $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on écrira parfois $f \ll g$ pour $f = o(g)$.

Exemples 3 : • Si $a \in \mathbb{R}$:

- $x \mapsto (x-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (développements limités)
- $x \mapsto (x-a)^k$, $k \in \mathbb{Z}$
- $x \overset{f_{\alpha,\beta}}{\longmapsto} |x-a|^\alpha (\log x)^\beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f_{\alpha,\beta} \ll f_{\alpha',\beta'} \iff \begin{cases} \alpha > \alpha' \\ \text{ou} \\ \alpha = \alpha' \text{ et } \beta > \beta' \end{cases}$

• Si $a = +\infty$:

- $x \overset{f_{\alpha,\beta,P}}{\longmapsto} x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$

$f_{\alpha_0,\beta_0,P_0} \ll f_{\alpha_1,\beta_1,P_1} \iff \begin{cases} P_1 > P_0 \text{ au voisinage de } +\infty \\ \text{ou } P_1 = P_0 \text{ et } \alpha_1 > \alpha_0 \\ \text{ou } P_1 = P_0, \alpha_1 = \alpha_0 \text{ et } \beta_1 > \beta_0 \end{cases}$

Remarque 4 : À ce stade, l'exemple 3 est admis.

2) Développement asymptotique

Définition 5 : Soit $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison en a. On dit que f a un développement asymptotique (DA) en a à la précision φ_n s'il existe $\varphi_0 \gg \dots \gg \varphi_n \in \mathcal{E}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) + o(\varphi_n(x))$$

$a_0 \varphi_0$ est la partie principale du DA.

Propriété 6 : Il y a unicité d'un DA à précision fixée.

Propriété 7 : On peut sommer, multiplier (si $\mathcal{E}$ est stable par multiplication) ou composer (si $\mathcal{E}$ est stable par composition) des DA (voir exemple 13)

Remarque 8 : Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, auquel cas $a = +\infty \in \overline{\mathbb{N}}$.

II Développements limités

Ici $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 9 : (Taylor-Young) Si f est D^n sur un voisinage de a, on a

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Définition 10 : Cette formule est le développement limité (DL) à l'ordre n en a.

Propriété 11 : On peut « dériver » et « intégrer » des DL. (voir une liste de DL en annexe 1)

Application 12 : Calcul de certaines limites :

$\frac{\tan x - x}{\sin x - x} \xrightarrow[x\to 0]{} -2$; $(x^3+x)^{1/3}-(x^3-x)^{1/3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Exemple 13 : Beaucoup de DA se font à partir de DL :

$$(1+x)^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\log x}{x}\right)^3 + o\left(\frac{\log x}{x}\right)^3$$

III Étude de séries et intégrales en $+\infty$

1) Sommation/intégration et comparaison.

Ici, $b\in\mathbb{R}$.

Proposition 14 : Soit $b\in\mathbb{R}$, et $f\in C^0([b,+\infty[,\mathbb{R})$,

- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^\alpha(\log x)^\beta)$ avec $\alpha<-1$ ou $\alpha=-1$, $\beta\leq-1$, alors $\int_b^{+\infty} f$ converge.
- si $x^\alpha(\log x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$ avec $\alpha>-1$ ou $\alpha=-1$, $\beta\geq-1$ alors $\int_b^{+\infty} f$ diverge.

Exemple 15 : Soit $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Γ est cv pour $x>0$.

Proposition 16 : Soit $g>0$ décroissante sur $[b,+\infty[$. Alors $\int_b^{+\infty} g$ cv ssi $\sum_{n\geq b} g(n)$ cv

Conséquence 17 : On a un analogue de la proposition 14 pour les séries.

Proposition 18 : (Comparaison de séries/intégrales) : Soit $b\in\mathbb{R}$, f,g mesurables sur $[b,+\infty[$, $g>0$, avec $f \underset{+\infty}{=} o(g)$

- Si $\int_b^{+\infty} g = +\infty$, alors $\int_b^x f \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_b^x g\right)$
- Si $\int_b^{+\infty} g < +\infty$, alors $\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$

On a les mêmes propriétés pour O, $\sim$, et des propriétés semblables pour les séries.

Remarque 19 : Cette proposition permet de montrer les assertions de l'exemple 3.

Exemple 20 : $\forall n\geq 0$: $\int_2^x \frac{dt}{\log t} \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,x}{(\log x)^{k+1}} + o\left(\frac{x}{(\log x)^{n+1}}\right)$

Remarques 21 : • On a parfois besoin d'un DA pour déterminer la convergence d'une série : ex : $\sum(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

- Les relations de comparaison ne suffisent souvent pas à obtenir des DA satisfaisants.

Contre-exemple 22 : On n'a pas de relation semblable pour les dérivées, par exemple $x+\sin(x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $1 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 1+2x\cos(x^2)$

2) Quelques règles d'équivalent « explicites »

Remarque 23 : Dans le cas où $\sum u_n$ diverge, on peut trouver un DA de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en cherchant d'abord un équivalent v_n, puis un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}(u_k-(v_k-v_{k-1}))$ et ainsi de suite (ça ne marche pas toujours).

Proposition 24 : Soit $g\in C^1([b,+\infty[,\mathbb{R})$, >0, tq : $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\mu}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors :

- si $\mu>-1$, $\int_b^{+\infty} g$ dv et $\int_a^x g \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\,g(x)}{\mu+1}$
- si $\mu<-1$, $\int_b^{+\infty} g$ cv et $\int_x^{+\infty} g \sim -\frac{x\,g(x)}{\mu+1}$

Proposition 25 : Soit $g \in C^1([b,+\infty[)$, >0, tq g' ne s'annule pas. Soit $h = \frac{g}{g'}$. On suppose $h'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

- si $g' > 0$, $\int_b^{+\infty} g$ diverge et $\int_b^x g \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{(g(x))^2}{g'(x)}$
- si $g' < 0$, $\int_b^{+\infty} g$ converge et $\int_x^{+\infty} g \sim -\frac{(g(x))^2}{g'(x)}$

Proposition 26 : Soit $g \in C^1([b,+\infty[)$, >0 tq $\frac{g'}{g} \xrightarrow[+\infty]{} \mu$. Alors :

- si $\int_b^{+\infty} g$ diverge, $\sum_{k=\lceil b \rceil}^{n} g(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_b^n g(t)\,dt$
- si $\int_b^{+\infty} g$ converge, $\sum_{k=\lceil b \rceil}^{n} g(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^{+\infty} g(t)\,dt$

(si $\mu = 0$, $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} = 1$)

Proposition 27 : Soit $g \in C^1([b,+\infty[)$, >0

- si $\frac{g'}{g} \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$, $\sum_{n \geq b} g(n)$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} g(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(n+1)$
- si $\frac{g'}{g} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$, $\sum_{n \geq b} g(n)$ diverge et $\sum_{k=\lceil b \rceil}^{n} g(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(n)$

Exemples 28 :
- $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \log m + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

où γ est la constante d'Euler.
- $m! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

IV Quelques techniques d'études de suites et d'intégrale à paramètre

1) Suites

a) définies par récurrence

Exercice 29 : Soit $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$, on a $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Proposition 30 : Soit f définie au voisinage de 0, telle que $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, $a > 0$, $x > 0$

soit u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
- si u_0 est suffisamment proche de 0, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $u_n \sim ((\alpha-1)an)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ $(u_0 \neq 0)$

Exemple 31 : Si $u_{n+1} = \log(1+u_n)$, $u_n \sim \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\log n}{n^2} + o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$

DÉV 1

b) définies de manière implicite

Idée 32 : Déterminer la limite de u_n, puis à partir de l'équation, calculer de proche en proche le DA.

Exemples 33 :
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, alors $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$
- si u_n est la plus grande racine de $X^{2n} - 2nX + 1$, $u_n = 1 + \frac{\log n}{2n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)$

2) Intégrale à paramètre : méthode de Laplace

Théorème 34 : Soient g, h mes. : $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tq :
- $g e^{h}$ est int.
- $\exists \delta_0 > 0$ $\forall \delta \in]0,\delta_0]$ $\forall x \geq \delta$ $h(x) \leq h(\delta)$
- $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} Ax^\alpha$, $A \neq 0$, $\alpha > -1$
- $h(x) \underset{x \to 0}{=} a - cx^\beta + o(x^\beta)$, $a \in \mathbb{R}$, $c, \beta > 0$.

Si $\varphi(t) = \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$, alors $\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \varphi(t)e^{at}$

DÉV 2

Corollaire 35 : Soit $g, h :]a,b[\to \mathbb{R}$ C^2 $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ tq :
- ge^h est int.
- h a un tableau de variation du type :

x	a		c		b
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

avec $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$

Alors $\int_a^b g(x)e^{th(x)}\,dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{-th''(c)}}\, g(c)\, e^{th(c)}$

Conséquence 36 (Formule de Stirling) :

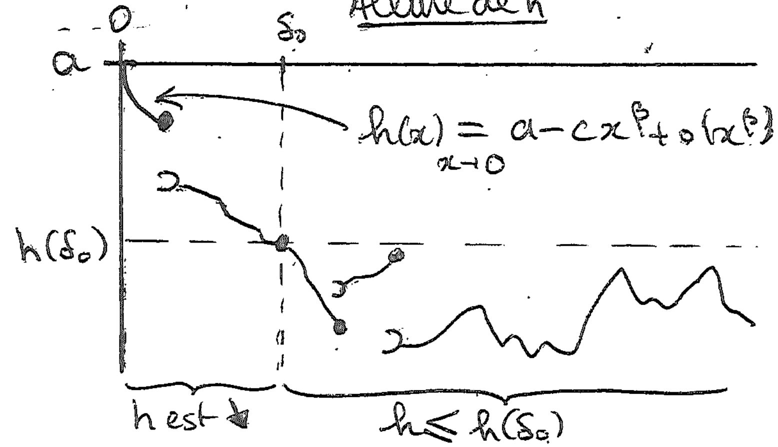
$$\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Annexe 1 : Des développements limités en 0 :

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
  - $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
  - $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
  - $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
  - $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
- si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} x^k + o(x^n)$
  - $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
  - $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
  - $\operatorname{argth} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
  - $\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \times \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
  - $\operatorname{argsh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!(-1)^k}{2^{2k} k!^2} \times \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

Annexe 2 : théorème 34 :

Allure de h



Allure de g