

NOM : FASCAL

Prénom : Barbara

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 240 - Produit de convolution. Transformée de Fourier. Applications

Autre sujet : Réf. Candelpergher, Calcul intégral
• Briane et Fages, Théorie de l'intégration

<u>I°) Convolution de fonctions.</u> 1) <u>Définition. Existence:</u> (a) <u>Opérateurs de translation:</u> Déf 1: $\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall f$ borélienne $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ on définit $T_a f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ $x \mapsto T_a f(x) = f(x-a)$ Thm 2: $\forall a \in \mathbb{R}^d, T_a$ est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1, \infty]$ Prop 3: Si $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $a \mapsto T_a f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ Contre-ex 4: $p = +\infty, f = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^\infty(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}^d, \ T_x f - f\ _\infty = 1 \nrightarrow 0$ (b) <u>Convolution de fonctions positives</u> Déf 5: $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ boréliennes on définit la convolée de f et g par $f * g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt$ Prop 6: $f * g$ est bien définie, borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx\right)$ Prop 7: $*$ est commutative, associative et $\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ Ex 8: $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,2] \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$ (c) <u>Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:</u> Prop 9: $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ boréliennes, $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d) \iff$ $f * g (x) < +\infty$. Dans ce cas on définit $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$	Prop 10: - si $f * g(x)$ existe alors $f * g(x) = g * f(x)$ - $f * g(x) \leq f * g (x)$ - si $f * g < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^d, f * g$ est borélienne. - $\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ Ex 11: $\alpha > 0$, on pose $G_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ $\forall \alpha, \beta > 0, G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}$ Thm 12: - $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g$ est définie λ-p.p. et $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\ f * g\ _1 \leq \ f\ _1 \ g\ _1$ - $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative Thm 13: - $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in [1, \infty]$ alors: - $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ - $f * g$ est uniformément continue - $\ f * g\ _\infty \leq \ f\ _p \ g\ _q$ - si de plus $1 < p, q < \infty$ et $\lim_{\ x\ \rightarrow \infty} f(x) = 0$ Thm 14: $p, q \in [1, \infty]$ tels qu'il existe $r \in [1, \infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p, g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors $f * g$ est définie λ-p.p. et $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $\ f * g\ _r \leq \ f\ _p \ g\ _q$ (Inégalité d'Young). 2) <u>Convolution et dérivation:</u> Déf 15: on note $\mathcal{E}_K^n(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$ à support compact. Déf 16: on appelle opérateur différentiel d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ une application D^p sur $\mathcal{E}_K^n(\mathbb{R}^d)$ de la forme: $D^p f = \sum_{ \alpha \leq p} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \alpha \in \mathbb{N}^d$ et $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{N}^d, \ p\ = \sum_{i=1}^d p_i$ Prop 17: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{E}^n$ bornée à dérivées
---	--

- Ouvrard, Probabilités 2
- Willem, Analyse harmonique réelle.

3/4

partielles bornées, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ alors $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ et $f * g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et si D est un opérateur différentiel d'ordre $p \leq n$ $D(f * g) = f * D(g)$.

EX18: $\frac{\partial}{\partial x} f * G_\alpha(x) = f * (-\frac{x}{\alpha} G_\alpha)$

3) Approximation de l'unité et régularisation

Rem19: L'algèbre $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$ ne possède pas d'unité.

Déf20: $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ suite de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si

- $\forall n \geq 1, \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda = 1$
- $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda < +\infty$
- $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_n| d\lambda = 0$

Prop21: (Construction générique) Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha d\lambda = 1$. on définit $\alpha_n(x) \equiv n^d \alpha(nx) \forall n \geq 1$. la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité.

Ex22: on utilise souvent:

- $\alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$ (Laplace)
- $\alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$ (Cauchy)
- $\alpha_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}t)^d} e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}$ (Gauss)

Thm23: Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité, $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors $\forall n \geq 1 f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Thm24: Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité, alors $f * \alpha_n$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée par $\|f\|_\infty$.
- si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f * \alpha_n(x) = f(x_0)$

- si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, $\|f * \alpha_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

EX25: $\mathcal{G}: x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est $\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact

App26: (Densité).
- $\mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_K$
- $\forall p \in [1, \infty], \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $\|\cdot\|_p$.

App27 (thm d'approximation de Weierstrass): f continue sur K compact est limite uniforme d'une suite de polynômes $(K(\mathbb{R}))$.

II) Transformée de Fourier:

1) Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Déf28: si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$ on définit la transformée de Fourier en ξ de f par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} f(x) dx$.

Prop29: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est $f \mapsto \mathcal{F}(f)$

linéaire, continue, où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 en l'infini et $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Prop30: - $\mathcal{F}$ conserve la parité

- si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f) g dx = \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{F}(g) dx$

- si $f \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ pour $k \geq 1$ et $\partial^p f \in L^1(\mathbb{R}) \forall p = 1, \dots, k$ on a $\mathcal{F}(\partial^k f) = (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(f)$

- si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\partial(\mathcal{F}f)$ existe et vaut $\mathcal{F}(-2i\pi x f)$.

Ex31: $f = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$

Ex32 (Gaussiennes) $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$

$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}$

Lemme33: $\sigma > 0, g_\sigma = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma \sqrt{2\pi}}$
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g_\sigma * f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} \mathcal{F}g_\sigma(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$

Prop34: si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \mathcal{F}g \Rightarrow f = g$ dans $L^1(\mathbb{R})$

Thm35: si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

App36: $a > 0, \mathcal{F}(\frac{a}{a^2 + x^2})(\xi) = \pi e^{-2\pi a |\xi|}$

2) Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ - convolution:

Déf37: on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mathcal{E}^\infty$ qui vérifient, $\forall k, p \in \mathbb{N}$ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \partial^k g(x)| < \infty$.

Prop38: $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Prop39: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$ $\forall p \geq 1$.

Thm 40: f et $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f * g}$ existe et $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

Ex 41: $f_a: x \mapsto \frac{a}{a^2 + x^2}$ alors $f_a * f_b = f_{a+b}$

Thm 42: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $fg \in L^1(\mathbb{R})$

$\widehat{f}(f), \widehat{f}(f) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors
 $\widehat{f}(fg) = \widehat{f}(f) * \widehat{f}(g)$.

3) Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Lemme 43: Si $g \in \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}(g) \in L^2(\mathbb{R})$
et on a $\|\widehat{f}(g)\|_2 = \|g\|_2$.

Thm 44: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $(g_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$
telle que $g_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on

pose $\widehat{f}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(g_n)$.

Cette limite existe et elle est indépendante de la suite g_n . On a alors

$\widehat{f}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est

une application linéaire continue
telle que $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \|\widehat{f}(f)\|_2 = \|f\|_2$. De

plus si $f, g \in L^2(\mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}(f), \widehat{f}(g) \rangle$.

Thm 45: (Planche de Plancherel) $\widehat{f}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

est un isomorphisme. Si on définit l'opérateur $Jf(x) = f(-x)$

sur $L^2(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} = \widehat{f} \circ J = J \circ \widehat{f}$.

App 46: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \pi.$$

III°) Applications:

1) convolution et somme de variables aléatoires indépendantes

Déf 47: μ_1, μ_2 deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. $S: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

Alors la mesure image $(x, y) \mapsto (x+y)$

de $\mu_1 \otimes \mu_2$ par S est appelée le produit de convolution de μ_1 et μ_2 , noté

$\mu_1 * \mu_2$. C'est encore une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

Prop 46: $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_1 * \mu_2) \Leftrightarrow$

$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1 + x_2) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \mu_1 \otimes \mu_2)$

Prop 47: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit x_1, x_2 deux V.A. indépendantes à

valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La loi de $x_1 + x_2$ est le produit de convolution de P_{x_1} et

P_{x_2} (i.e. $P_{x_1 + x_2} = P_{x_1} * P_{x_2}$).

Prop 48: Si x_1 et x_2 admettent des densités f_{x_1}, f_{x_2} (resp.) alors $x_1 + x_2$ admet

la densité $f_{x_1} * f_{x_2}$.

Ex 49: On définit la loi $\gamma(a, p)$ de densité

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \frac{p^a}{\Gamma(a)} e^{-px} x^{a-1}, x_1 \text{ de loi } \gamma(a_1, p)$$

x_2 de loi $\gamma(a_2, p)$ indépendantes $\Rightarrow$

$x_1 + x_2$ de loi $\gamma(a_1 + a_2, p)$.

2) Etude des signaux à spectre borné

Déf 50: $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $BL^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid$

$$\widehat{u}(y) = 0 \text{ } \forall y \text{ sur } \mathbb{R} \setminus I\}$$

Prop 51: BL^2 est complet.

Prop 52: Si $u \in BL^2$ alors $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$\text{et } \|u\|_0 \leq \|u\|_2$$

Rappel 53: si $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\int_{\mathbb{T}} h(y) e^{2\pi i x y} dy$

(Riemann-Lebesgue) $\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$

Prop 54: la suite de fonctions

$$(\frac{1}{\sqrt{2k}} \sin_c)_{k \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de BL^2 .

Thm 55: (Echantillonnage de Shannon) L'application

$$U: BL^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ est}$$

$$u \mapsto (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

unitaire et pour tout $u \in BL^2$, $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sin_c(x-k)$

et la série converge uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

3) Un pas vers la transformée de Laplace:

Thm (Paley-Wiener) 56: Soit f

continue, $\in L^1(\mathbb{R})$. $f \in \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R})$

avec f nulle en dehors de $[-M, M]$

ssi $\widehat{f}(f)$ se prolonge en une

fonction analytique dans

tout $\mathbb{C}$ telle que pour tout

$k \geq 0$, $\exists C_k > 0$ avec $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|\widehat{f}(f)(z)| \leq \frac{C_k}{|z|^k} e^{2\pi M |Im z|}$$

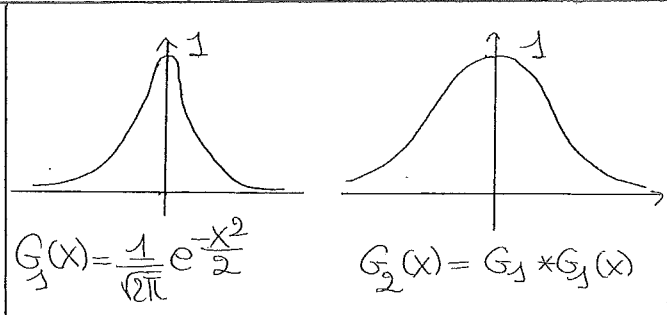
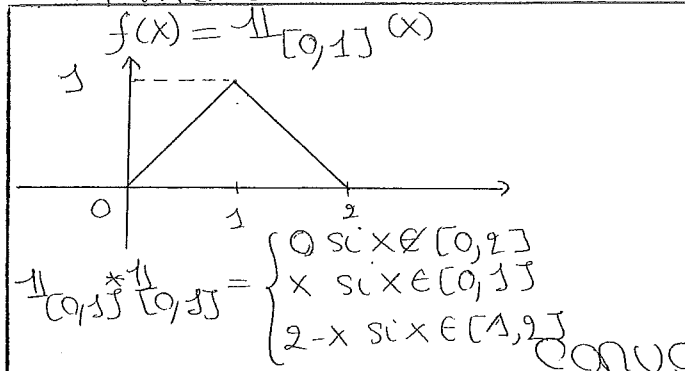
$$|z|^k$$

DEV 1

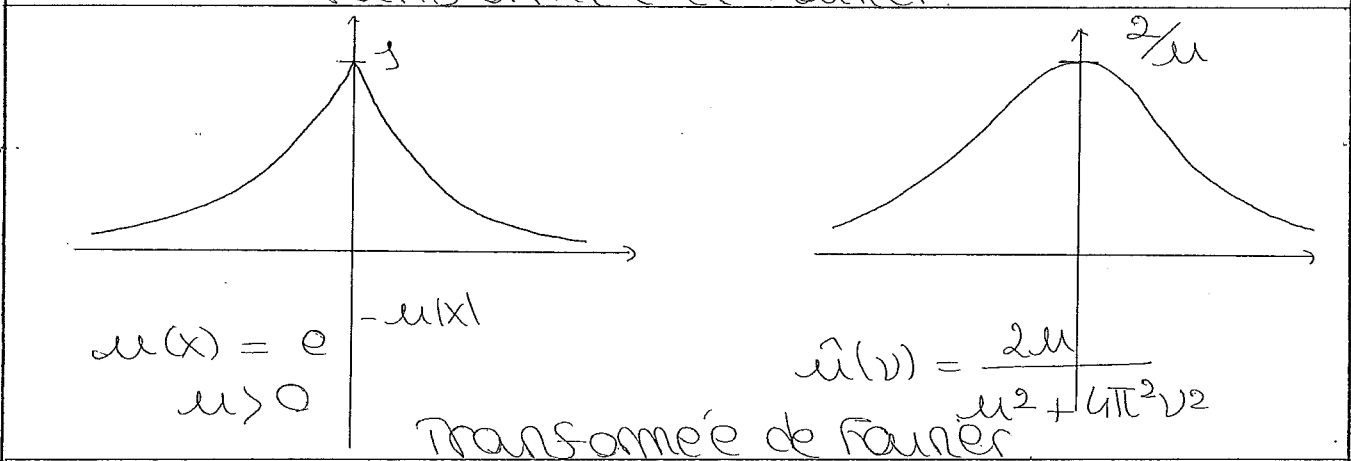
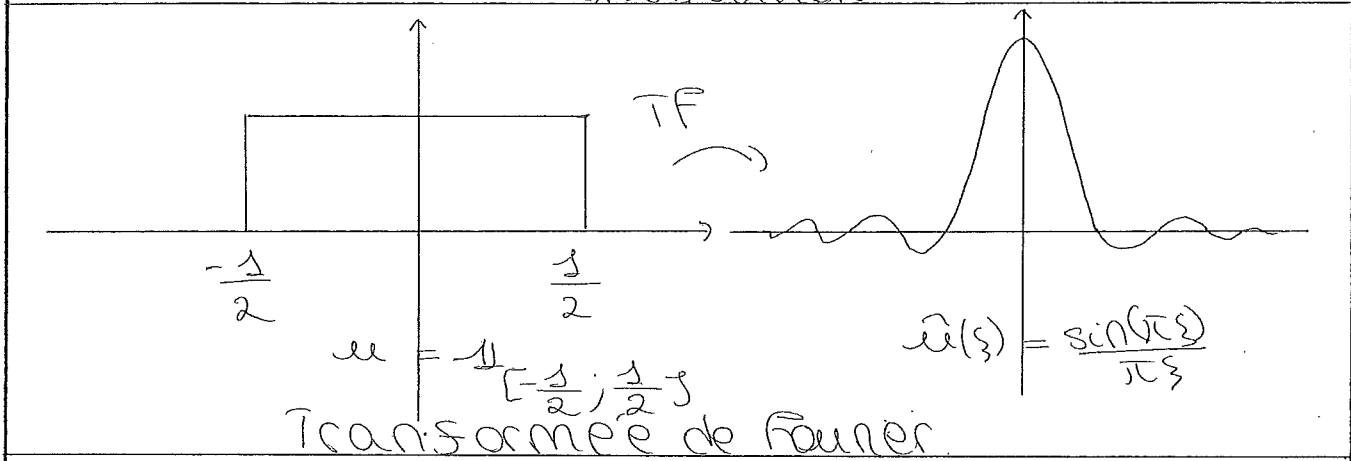
$$\begin{aligned} & \sin \\ & \text{cardinal} \\ & = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \end{aligned}$$

DEV 2

Annexe :



convolution



Questions (plan) [1]

* Ita Sert à quoi?

↳ qd on approxime l'unité on convérte et on se sert de la continuité de la transform pour dériver la cvgce

* fa utiliser quoi ts fait que la prop lui est unij. (°)? (prop 3)

↳ en 0 + la continuité normale + continuité de L^p ?

Preuve?

↳ $f \in L^p$, $p \in [1, \infty]$, $\|T_a f - f\|_p$

prop $C_K^\infty(\mathbb{R})$ est dense de $L^p(\mathbb{R})$. Si $\varphi \in \mathcal{E}_K^\infty$ $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x-a) - \varphi(x)|^p dx$

$$= \int_{-n-1}^{n+1} |\varphi(x-a) - \varphi(x)|^p dx$$

↑ $K \text{ compact } = [-1, 1]$ et $a < 1$ (on va le faire tendre vers 0)

$$\leq 2(n+2) \varepsilon^p$$

$[-n-1, n+1]$

↑ pour $|a| < \delta$ le module d'uc (φ uc si K compact)

$$\text{Si } \varphi \in \mathcal{E}_K^\infty(\mathbb{R}) \text{ tq } \|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon/3$$

$$\|T_a f - f\|_p \leq \underbrace{\|T_a f - T_a \varphi\|_p}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{\|T_a \varphi - \varphi\|_p}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{\|\varphi - f\|_p}_{\leq \varepsilon/3}$$

Bien avoir en tête l'enchaînement densité $\mathcal{E}_K^\infty \rightarrow T_a \text{ uc} \rightarrow \mathcal{E}_K^\infty$ dense

* (thm 11) Idée de la preuve?

* (thm 12) Rep. d'hyp. Pas un meilleur cadre où le poser?

↳ Plus utile ancien que méthode de calcul que conceptuelle

D'où ici

$$\text{Mais conceptuellement, } L^2 \text{ meilleur cadre } f, g \in L^2 \rightarrow fg \in L^1 \rightarrow \mathcal{F}(fg) \in \mathcal{E}_0^\infty$$

* Et ce qu'on peut faire la transform de Fourier de densité de L^2 que L^1 et L^∞ ?

↳ densité des fct f de la sf L^1 mu br de la continuité sur les $\mathcal{E}_K^\infty$

$$\text{TF: } L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

$$L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R}) \text{ où } 1/p + 1/q = 1$$

(interpolat°)

pour $p \in (1, 2]$

Questions (plan) (2)

* III.1 (Def 47). C'est quoi la mesure image?

$$\hookrightarrow \mu_1(A) * \mu_2(A) = \mu_1 \otimes \mu_2 (S^{-1}(A))$$

* Equivalent de la transformée de Fourier en proba?

$$\hookrightarrow TF(X)(z) = \mathbb{E}[e^{-2i\pi \langle X, z \rangle}]$$

Remarques (plan)

|| Apprécier la théorie
|| Dopper les appli

* Ici pas très bien placée. Mettre ça juste au lb I?

* Bcp de lpr passé à la convolu? Laborieux. (Inégalité de Young)
Ils utile? (impl)

Commencer à la prop 9

* Bilinearité de la convolu° : bien à mettre

* Défense de plan : insister sur les résultats math impl (eg inégalité de Young) Hiérarchiser

• motiver $\varphi : \text{smiley}$ par bcp de les longuins

• Lien à la dérivée impl car permet pour les appl de l'unité

• exple d'approche de l'unité à supp. compact? à l'éto

* Transf. de Fourier de $\mathbb{R}$. Bcp + cher de $\mathbb{R}^d$?

La non, m permettrait de pas se braquer des polynômes + on les a dérivés + faciles de qd

Mais au moins dire que d'illd il se peut peut

* Thm 44 : un peu compliqué. Peut-être par bcp rappeler de la convolu°

* Si on parle de la transformée de Laplace : en mettre + ?

* La proba. de le cadre de la Bcon : $\varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1} \varphi_{X_2} \Leftrightarrow X_1, X_2$
(appl directe) ind.

Etude de signaux à spectre borné - Théorème de Shannon

Exemple fondamental : soit $u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \equiv \text{sinc}(x)$
 alors $u \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{u}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}(\xi)$. La fonction $\sin$
 est à spectre borné.

↳ Le support de sa transformée de Fourier est borné.

Dans la suite on se ramène toujours (quitte à effectuer
 une dilatation) au cas où le support de $\hat{u}$ est inclus dans

$$\Sigma = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$$

Proposition : l'espace $BL^2 = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{u}(\gamma) = 0 \text{ 1-p.p. sur } \mathbb{R} \setminus \Sigma \}$ est complet.

Démonstration : $BL^2 \subset \underbrace{L^2(\mathbb{R})}_{\text{complet}}$ donc il suffit de montrer
 que BL^2 est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$.

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans BL^2 telle que u_n converge
 vers u dans $L^2(\mathbb{R})$. La continuité de l'application
 transformée de Fourier $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ implique que

$\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En posant $\Omega = \mathbb{R} \setminus \Sigma$ on a
 a fortiori, $\hat{u}_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ or par définition de BL^2
 $\hat{u}_n|_{\Omega} = 0$ dans $L^2(\Omega)$ donc $\hat{u}|_{\Omega} = 0$ d'où $u \in BL^2$

Proposition : Si $u \in BL^2$ alors $u \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_2$

Démonstration : soit $u \in BL^2$. Par définition $\hat{u} \in L^2(\Sigma)$

donc comme $\lambda(\Sigma) = 1$ finie, $\hat{u} \in L^1(\Sigma)$. Alors

$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} dy$ par théorème d'inversion
 de la transformée de Fourier.

$$= \int_{\Sigma} \hat{u}(y) e^{2i\pi xy} dy$$

on utilise alors le lemme de Riemann Lebesgue pour
 avoir $u(x) \rightarrow 0 \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} u \in C_0(\mathbb{R})$

d'après l'inégalité de Cauchy - Schwarz :

$$|u(x)| \leq \|\hat{u}\|_2, \text{ or par le théorème de Plancher } \|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$$

on a $|u(x)| \leq \|u\|_2 \Rightarrow \|u\|_\infty \leq \|u\|_2$ d.

Proposition: la suite de fonctions $(\tau_k \sin_c)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2 .

Démonstration: posons $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{[-1/2, 1/2]} e^{2i\pi kx}$
 $\hat{e}_k(\xi) = \tau_k \sin_c(\xi)$
 (translation) modulation

on vérifie alors la conservation du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tau_j \sin_c(\xi) \tau_k \sin_c(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e_j(x) \overline{e_k(x)} dx \\ &= \int_{\Sigma = [-1/2, 1/2]} e_j(x) \overline{e_k(x)} = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

la suite $(\tau_k \sin_c)_{k \in \mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.

Soit $u \in BL^2$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} u(x) \tau_k \sin_c(x) dx = 0$

on a alors $\int_{\mathbb{R}} u(x) \hat{e}_k(x) dx = 0 = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e_k(\xi) d\xi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

La famille des (e_k) est totale sur $L^1(\Sigma)$.

$$0 = \int_{[-1/2, 1/2]} \hat{u}(\xi) e_k(\xi) d\xi$$

De sorte que $\hat{u}(\xi) = 0$ presque partout sur Σ
 donc dans BL^2 , $\hat{u} = 0$.

Par injectivité de la transformée de Fourier cela implique $u = 0$ et $(\tau_k \sin_c)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale.

Théorème d'échantillonnage: l'application

$$U: BL^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

est unitaire et

$$u \mapsto (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

pour tout $u \in BL^2$

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \sin_c(x-k) \text{ et la série}$$

converge uniformément et dans L^2

Démonstration: Grâce à la proposition précédente, (2/0)

dans BL^2 on a $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \tau_k \sin_c \rangle \tau_k \sin_c$ DVT 1 2/2

or $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$ donc la convergence au sens L^2 implique la convergence uniforme. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle u, \tau_k \sin_c \rangle \sin_c(x-k)$$

donc pour $x=j \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$u(j) = \langle u, \tau_j \sin_c \rangle \sigma.$$

$$\hookrightarrow u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \tau_k \sin_c$$

Corollaire: si $u, v \in BL^2$ alors

$$a) \|u\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u(k)|^2$$

$$b) \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{v(x)} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \overline{v(k)}.$$



$$\sigma I = \left[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right]$$

ça ne sert à rien d'échantillonner à $\frac{1}{\sigma}$ rapprochée
Car l'info est contenue dans les $u(k)$.

C'est ce qu'on peut faire et c'est pour plus de k (pour améliorer la qualité de l'échantillon)

Théorème de Paley - Wiener Soit f une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}$. f est $\mathcal{E}^\infty$ à support compact inclus dans $[-M, M]$ si et seulement si $\tilde{f}(f)$ se prolonge en une fonction analytique dans tout $\mathbb{C}$ telle que, pour tout entier $k \geq 0$ il existe $C_k > 0$ avec, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$|\tilde{f}(f)(z)| \leq \frac{C_k}{|z|^k} e^{2\pi M |\operatorname{Im}(z)|}$$

Démonstration $\Rightarrow$ Supposons $f \in \mathcal{E}^\infty$ à support compact inclus dans K compact.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} f(x) dx = \int_K e^{-2i\pi x \xi} f(x) dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}$$

or si $z \in \mathbb{C}$

$$\left| e^{-2i\pi x z} f(x) \right| = e^{-2\pi \operatorname{Im}(z)x} |f(x)| \text{ intégrable sur } K$$

Poseons donc $\tilde{f}(f)(z) = \int_K e^{-2i\pi x z} f(x) dx$ pour $z \in \mathbb{C}$

$\tilde{f}(f)$ est analytique sur toute bande $a < \operatorname{Im} z < b$ (par domination de Lebesgue) donc sur tout $\mathbb{C}$.
Rq: Ceci permet de montrer que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $\tilde{f}(f) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On suppose donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle en dehors de $E_M, M]$ donc $\forall z \in \mathbb{C}$: $\tilde{f}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x z} f(x) dx$ analytique sur $\mathbb{C}$ et en $\mathbb{R}$ effectuant k intégrations par parties successives

$$(-2i\pi z)^k \tilde{f}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x z} \frac{d^k}{dx^k} f(x) dx$$

or f est nulle en dehors de $E_M, M]$ donc

$$|2i\pi z|^k |\tilde{f}(f)(z)| \leq \int_{[-M, M]} e^{2\pi \operatorname{Im}(z)x} \frac{d^k}{dx^k} |f(x)| dx$$

mais $|2\pi z|^{-R} |\hat{f}(f)(z)| \leq \left(\int_{[-M, M]} |f(x)| dx \right) e^{2\pi CM |Im z|}$
 posons $C_R = \frac{1}{(2\pi)^R} \left(\int_{[-M, M]} |f(x)| dx \right)$ on a

alors $\forall k \geq 0$

$$|\hat{f}(f)(z)| \leq \frac{C_R}{|z|^k} e^{2\pi CM |Im z|}$$

⇒ Supposons que $\hat{f}(f)$ vérifie les hypothèses du théorème

comme f est intégrable, $\hat{f}(f)$ est continue

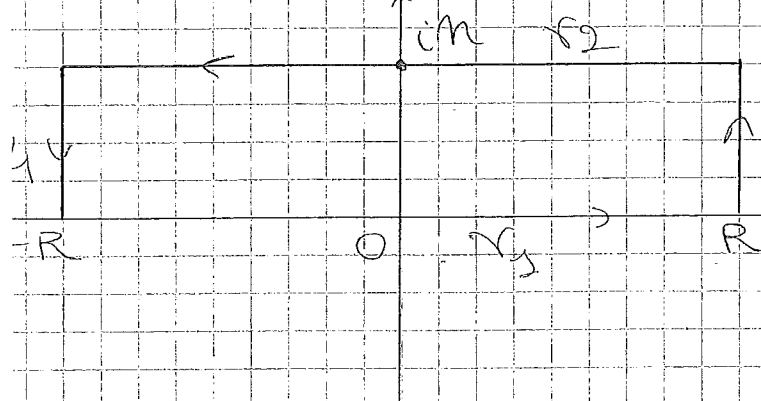
$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad |\hat{f}(f)(\xi)| \leq \frac{C_R}{|\xi|^k}$ pour $k \geq 2$ cela implique que $\hat{f}(f) \in L^1(\mathbb{R})$

→ par le théorème d'inversion, on a
 $x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(f)(\xi) d\xi$

$$\text{or } \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(f)(\xi) \right) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(f)(\xi)$$

et grâce à la majoration de $\hat{f}(f)$ on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour conclure que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

on considère le lacet γ_R , $n \neq 0$



comme $\hat{f}(f)$ est analytique sur $\mathbb{C}$
 $\int_{\gamma_R} e^{2\pi i z x} \hat{f}(f)(z) dz = 0$

• Intégrale sur les segments verticaux

sur $[R, R+in]$ $e^{2\pi i x z} |\hat{f}(f)(z)| \leq \frac{C_R}{R^k} e^{2\pi CM |Im z|}$

donc $\int_{\gamma_3} e^{2\pi i z x} \tilde{f}(f)(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ de même avec γ_4 (240)
11/2
3/3

$$\begin{aligned} \text{donc } f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x z} \tilde{f}(f)(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x (\xi + i\eta)} \tilde{f}(f)(\xi + i\eta) d\xi \end{aligned}$$

J'ai la majoration

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq e^{-2\pi \eta x + 2\pi M |\eta|} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(f)(\xi + i\eta)| d\xi \\ &\leq e^{-2\pi \eta x + 2\pi M |\eta|} \int_{\mathbb{R}} \frac{Ck}{|\xi + i\eta|^k} d\xi \end{aligned}$$

prenons $k = \frac{2}{2\pi \lambda x^2} + 2\pi M \lambda |x| > 1$, $\eta = \lambda x$

$$|f(x)| \leq e^{-2\pi \eta x + 2\pi M |\eta|} \int_{\mathbb{R}} \frac{Ck}{\xi^2 + \lambda^2 x^2} d\xi$$

J'ai $\forall x \neq 0, \forall \lambda > 1$

$$|f(x)| \leq e^{-2\pi \lambda(x^2 - M|x|)} \int_{\mathbb{R}} \frac{Ck}{\xi^2 + \lambda^2 x^2} d\xi$$

On fait alors tendre λ vers $+\infty$ et on obtient

$$f(x) = 0 \quad \text{si } |x| > M.$$