(239)

Leçon peu soignée

**NOM :** FROT **Prénom :** Robin **Jury :**

**Algèbre** ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

**Sujet choisi :** 239 Fonction définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, Exemples et applications.

**Autre sujet :**

## I Régularité

Dans cette partie, on considère $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : I \times X \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L^1(X)$

On pose de plus $F(t) = \int_I f(t,x)\,d\mu$

### A) Continuité

1) Théorème (continuité en un point)

Soit $a \in I$, Supposons que

(i) Pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $a$

(ii) Il existe un voisinage $V$ de $a$ et $g \in L^1(X)$ positive telle que pour tout $t$ et $x$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ où $t \in V$ et $x \in X$

Alors $F$ est continue en $a$.

2) Corollaire (continuité sur $I$)

Si de plus

(i') Pour presque tout $x \in X$, $f$ est continue sur $I$

(ii') Pour tout compact $K \subset I$, il existe $g_K$ positive intégrable telle que $\forall (t,x) \in K \times X$, $|f(t,x)| \leq g(x)$

alors $F$ est continue sur $I$.

3) Exemples

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^x+1}$ est continue sur $]1,+\infty[$
- $\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$

4) Théorème (double limite)

Soit $a \in \overline{I}$.

Supposons que

(i) $\exists L \in L^1(X)$, $\lim_{t \to a} f(t,x) = L(x)$ p.p.

(ii) $f$ vérifie la condition (ii) de 2) pour $V = I$

alors $\lim_{t \to a} F(t) = \int_I L(x)\,d\mu$

5) exemple

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t^x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$, . . . . .
- Le théorème ne permet pas de trouver $\lim_{x \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt$

6) Remarque : on aurait pu remplacer $I$ par un espace métrique $E$

### B) Dérivabilité

7) Théorème : (dérivabilité)

Supposons que

(i) pour presque tout $x$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $I$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial t}$ vérifie la condition (ii') de 2)

alors $F$ est dérivable sur $I$ et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu$

Si de plus $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est de classe $C^1$, alors $F$ aussi.

difficile, hypothèses très (trop) fortes
pas d'ex d'appli où on n'aurait pas pu utiliser cv ce dominée. Ca attendu ?



8) **Exemple** (fonction Γ d'Euler)

Posons $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} x^{t-1} e^{-x}\,dx$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

Son tableau d'accroissement est :

| $x$ | $0$ | $1$ | $c$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\Gamma$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\Gamma(c)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

avec $c \in ]1, 2[$

## c) Holomorphie

On remplace $I$ par $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$

9) **Théorème** (holomorphie)

Supposons que : (i) pour tout $x \in X$ $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur $\Omega$
(ii) $f$ vérifie (ii) de 2)

alors $F$ est holomorphe sur $\Omega$.

10) **Exemple**

La fonction $\Gamma : \{z, \operatorname{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} x^{z-1} e^{-x}\,dx$$
est holomorphe sur son ensemble de définition.
$\Gamma$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant des pôles simples en $\mathbb{Z}_-$.

# II Comportement asymptotique

## a) Étude asymptotique de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$

Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ borné ou non et $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$, $g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continues

demandé par le rapport du jury.

11) **Théorème** (sommation des relations o et O)

Supposons que $f = o(g)$ (resp $O(g)$) en $b$.

- Si $g$ est intégrable alors on a :
$$\int_x^b f(t)\,dt = o\left(\int_x^b g(t)\,dt\right) \quad \left(\text{resp } O\int_x^b g(t)\,dt\right)$$
- Sinon
$$\int_a^x f(t)\,dt = o\int_a^x g(t)\,dt \quad \left(\text{resp } O\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

12) **Exemple** : $\int_1^x e^{-t}\ln t \underset{x\to 1}{=} o(e^{1-x}) \underset{x\to 1}{=} o(x-1)$

## b) Méthode de Laplace

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ où $I = ]a, b[$ et $F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda\varphi(x)} f(x)\,dx$

13) **Théorème** (Méthode de Laplace)

Si $F(\lambda)$ est définie pour $\lambda \geq \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$ et qu'il existe $\gamma \in ]a, b[$ tel que
$$\begin{cases} \varphi'(\gamma) = 0 \\ \varphi'(x) < 0 \text{ si } x < \gamma \\ \varphi'(x) > 0 \text{ si } x > \gamma \\ \varphi''(\gamma) \neq 0 \\ f \text{ est continue en } \gamma \text{ et } f(\gamma) \neq 0 \end{cases}$$
alors $F(\lambda) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,\dfrac{f(\gamma)}{\sqrt{\varphi''(\gamma)}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\,e^{-\lambda\varphi(\gamma)}$

DEV 1

14) **Exemple** (Formule de Stirling)

On a $\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2} e^{-x}$

# III Applications et exemples fondamentaux

## a) Calcul d'intégrales

15) **Exemples**

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (on pose $\int_{\mathbb{R}} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$)
- (Gauss) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

(Fresnel) $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

## b) Transformée de Fourier

16) définition (transformée de Fourier $L^1$)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx$ sa transformée de Fourier.

17) Théorème : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$

(i) Si $xf$ est intégrable alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$

(ii) Si $f$ est de classe $C^1$ et si $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'} = it\hat{f}$

18) Propriété :
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(t) \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

19) définition (espace de Schwartz)
Soit $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ telles que pour tout $p, k \geq 0$, $(x \mapsto x^p f^{(k)}(x))$ est bornée

20) Exemple : $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}$

21) Théorème (inversion de Fourier)
$\mathcal{S}$ est stable par $f \mapsto \hat{f}$.
De plus, on a $\hat{\hat{f}} = f$ (Dev 2)

## c) Produit de convolution

22) définition (produit de convolution)
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on pose
$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$

23) Propriété : Le produit de convolution est bien défini et appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

24) définition : (approximation de l'unité) Pas Bien !
Une suite $(\varphi_n)_n \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $f \in L^1$ $\|\varphi_n * f - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est appelé une approximation de l'unité.

25) Prop Soit $\varphi$ positive intégrable ~~et bornée~~ d'intégrale 1 et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.
Alors $(\varphi_n)$ est une approximation de l'unité

26) ~~Théorème~~ on a pour $f \in L^p(\mathbb{R})$
$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$

27) Remarque : on prend en général $\varphi$ de classe $C^\infty$ à support compact.
Ainsi $\varphi_n * f_i$ est aussi $C^\infty$, d'où des théorèmes de densité par 26)

# Commentaires



- ⚠ À la dérivabilité sous le signe intégrale.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,x]}(t) f(t)\,dt}$$

$\forall t \quad x \mapsto \mathbb{1}_{[0,x]}(t) f(t)$ dérivable presque part (part sf en $x = t$)

Cex super classique

Mais on ne peut dériver :

$$x = \int_0^x 1\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\,dt$$

$$1 \neq \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathbb{1}_{[0,x]}(t)}{\partial x} = 0$$

- Commencer par le thm fondamental n'est pas absurde :

(i) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ . $f$ continue.
$F$ dérivable et $F'(x) = f(x)$

(ii) $f$ $\mathcal{C}^1$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

⚠ (i) s'étend à $L^1$ (dvt possible) mais (ii) non.

- Comme $f$ : qd le param est de $\mathbb{N}$. ← continuité (regularité) pas intéressante ms...

limiter $\int_X f_n \,d\mu$ ? Beppo-Levi, Fatou, Cvgce dominée

fondamentaux ms portent de suites positive

⇓

Corrolaire on ne peut s'intéresser a la cont. ss l'int que ds des esp. où on peut def la continuité par caractère seq. (espace métrique)

- continuité sous l'$\int$ en un pt / partout, dépend du pt.
- dérivabilité sous l'$\int$ variable $t \in I$, p part indep de $t$ (Acc fini)
- holomorph sous $\int$

- $\Gamma$ sur $\mathbb{R}$ (exple ?)                Volume de la boule ②

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \longrightarrow \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} 2r \\ \pi r^2 \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array}$$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \to \begin{array}{l} \text{rat } \pi^3\, r^4 \\ \text{rat } \pi^3\, r^5 \\ \text{rat } \pi^3\, r^6 \end{array}$$

(- Rq on peut mettre (un peu) d'int impropre à param)

- Exo. $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad x > 0$

impropre.

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$$

$f = g$

montre qu'elles vérifient la m équa diff

- III formule de Cauchy (analyse complexe)

Applicat° (impte) : $f$ holom.
$f$ DSE sur un disque

- IV Convolut° puis V transformée de Fourier

(attention $\mathcal{C}_c^\infty \subset L^p$ dense, outil fondamental)