NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse N°236.

Sujet choisi : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Autre sujet :

On considère ici des fonctions $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$), et un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$

I - Calculs directs dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

A) Primitives et décomposition en éléments simples

Rappel 1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue admettant une primitive notée F. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ex 2: Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$

Ex 3: Intégrales de Cauchy

Soit $\alpha > 1$. Alors $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = (1+\alpha)^{-1}$

Rq 4: Pour une fonction rationnelle, il faut souvent la décomposer en éléments simples.

Ex 5: Soit $0 < a < b$ et $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \frac{1}{b^2-a^2}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{t^2+a^2} - \frac{1}{t^2+b^2}\right]dt = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

B) Intégration par parties

Rappel 6: Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors :

$$\int_I f g' = [f g]_a^b - \int_I f' g.$$

Ex 7: Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$. Alors

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ avec } (I_0, I_1) = (\pi/2, 1)$$

Ex 8: Fonction de Gauss

$$\int_0^\infty \exp[-x^2]\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$

DV1

Ex 9: Fonction Gamma

Soit $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ avec $x > 0$.

Alors $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ puis $\Gamma(n+1) = n!$ avec $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

C) Changement de variable

Rappel 10: Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f : J \to E$ continue par morceaux avec $\varphi(I) \subset J$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Ex 11: $\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Rq 12: Règles de Bioche

On cherche à calculer $\int R(\sin(t), \cos(t))$ avec R une fraction rationnelle.

Si $R(\sin x, \cos x)\,dx$ reste inchangé en changeant x en :

- $\pi - x$, on pose $t = \sin x$.
- $-x$, on pose $t = \cos x$.
- $\pi + x$, on pose $t = \tan x$.

Sinon on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ en utilisant

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ex 13: $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = t - 2\arctan t + k$

Ex 14: Soit $|t| < 1$. Alors :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - t\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{Arctan}\left[\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right]$$

II - Généralisation au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$

A) Théorème de Fubini

Rappel 15: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ intégrable, positive

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\,dx_1 \dots dx_{i-1}\,dx_{i+1} \dots dx_n\right)dx_i$$

Réf :
* Gourdon - Analyse
* Cassini, Analyse (Tomes 2 & 3)
* Eric Amar, Analyse complexe
* Evans, Approximating Integrals via Monte Carlo and deterministic Methods (p 101-110)
* Candelpergher, Calcul intégral
* Demailly : Analyse numérique et équa. diff.

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse n° 236

Sujet choisi :

Autre sujet :

236

dim 1 : 2
dim 2 : π
dim 3 : 4/3 π
dim 4 : π²...

intéressant

Ex16 : Soit $\lambda_n(B(0,\sqrt{t}))$ volume de $\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_2^2 \leq t\}$

Alors $\lambda_n(B(0,\sqrt{t})) = t^{n/2}\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Rappel 17 : Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mesurable. Elle est intégrable ssi $\int_{\mathbb{R}}(\cdots(\int_{\mathbb{R}}|f|dx_1)\cdots)dx_n < \infty$.

Dans ce cas :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx_1\dots dx_n = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\, dx_1\dots dx_{i-1}\, dx_{i+1}\dots dx_n\right)dx_i$$

Application 18 : $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\chi_{]0,1[\times]0,1[}(x,y)$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f\,dy\,dx = \frac{\pi}{4} \quad\text{et}\quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f\,dx\,dy = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc f n'est pas intégrable

B) Changement de variables

Rappel 19 : Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi: U\to V$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $f:V\to\mathbb{C}$ mesurable. Alors f intégrable ssi $(f\circ\varphi)|\det \mathrm{Jac}\,\varphi|$ l'est. Dans ce cas :

$$\int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int_U f(\varphi(x_1,\dots,x_n))|\det \mathrm{Jac}_\varphi(x_1,\dots,x_n)|\,dx_1\dots dx_n$$

Rq 20 : Passage en polaire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+^*\times]-\pi;\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Ex 21 : Fonction de Gauss (B : 8)

Rq 22 : Coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}_+^*\times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\times]0;2\pi[} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\,r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Ex 23 : $\lambda_3(B(0,R)) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Rq 24 : Coordonnées cylindriques

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}_+^*\times]-\pi;\pi[\times\mathbb{R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

Ex 25 : Calculs de volumes des surfaces de révolution bornées.

III - Calculs via une fonction auxiliaire

A) Intégrales à paramètres

Ex 26 : Soit $a>1$ et $b>1$. Grâce à

$$F(t) = \int_0^\pi \ln(t-\cos x)\,dx$$

on a $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx = \pi\ln\left[\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right]$

Ex 27 : Fonction de Gauss - Ter

$$\int_0^\infty e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ via } f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

B) Passage aux séries

Ex 28 : Sommes partielles

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((2m+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cdot\frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt = 2\min(m,n)+1$$

Ex 29 : Séries entières

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -C \text{ avec}$$

$C \approx 0{,}91597$ constante de Catalan

Ex 30 : Séries de Fourier

Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{\operatorname{ch} a - \sin x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n\equiv 1[2] \\ 2\dfrac{(-1)^{n/2}e^{-na}}{\operatorname{sh} a} & \text{sinon}\end{cases}$$

DV 1/2

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse n°236

Sujet choisi :

Autre sujet :

Ex 31 : ~~Séries~~ Sommes de Riemann.

Soit $\rho \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, $I(\rho) = \int_0^\pi \log(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\,d\theta$

Si $|\rho| < 1$, $I(\rho) = 0$

Si $|\rho| > 1$, $I(\rho) = 2\pi \log|\rho|$

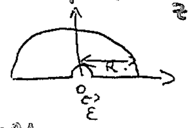
Cf Formule des Résidus

Rappel 32 : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur $\Omega \setminus S$, où $S \subset \Omega$ sans point d'accumulation dans Ω. Soit $K \subset\subset \Omega$ à bord régulier, avec $\partial K \cap S = \emptyset$. Alors $\#(S \cap K) < \infty$ et

$$\int_{\partial K} f\,dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}(f, a)$$

Ex 33 : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ avec $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ et

K dessiné ci-après



IV - Approximations numériques

Déf 34 : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Soit $x_1 < \dots < x_n$ subdivision de I. On pose

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

La méthode par interpolation de Lagrange de f est : $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_I l_i(x)\,dx$

Ex 35 : Méthode des rectangles à gauche

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\,f(a)$$

(cf dessin 1)

Ex 36 : Méthode des rectangles à droite

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\,f(b) \quad \text{(cf dessin 2)}$$

Ex 37 : Méthode du point milieu

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{(cf dessin 3)}$$

Déf 38 : Les méthodes dites de Newton-Cotes pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ prennent la subdivision régulière

$x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b$,

avec $x_i = a + \frac{i-1}{n-1}(b-a)$

Ex 39 : Méthode des trapèzes $(n=2)$

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \quad \text{(cf dessin 4)}$$

d'erreur E, si $f \in C^2$:

$$|E| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \|f''\|_\infty$$

DVS

Ex 40 : Méthode de Simpson $(n=3)$

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq (b-a)\left[\frac{f(0)}{6} + \frac{2}{3} f(1/2) + \frac{f(1)}{6}\right]$$

Ex 41 : Evaluation de $\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx$:

- rectangles à gauche : π
- rectangles à droite : π
- point milieu : 0
- trapèzes : π
- Simpson : $\pi/3$.

avec $\int_0^\pi \cos^2 x = \frac{\pi}{4}$ (cf ex. 7)

→ très bien !

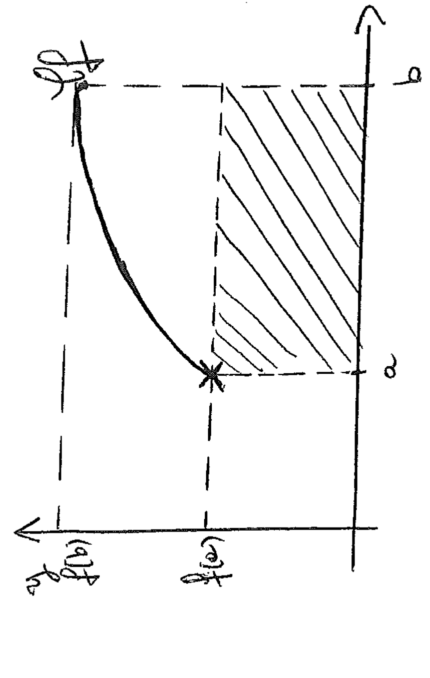
3/3

236

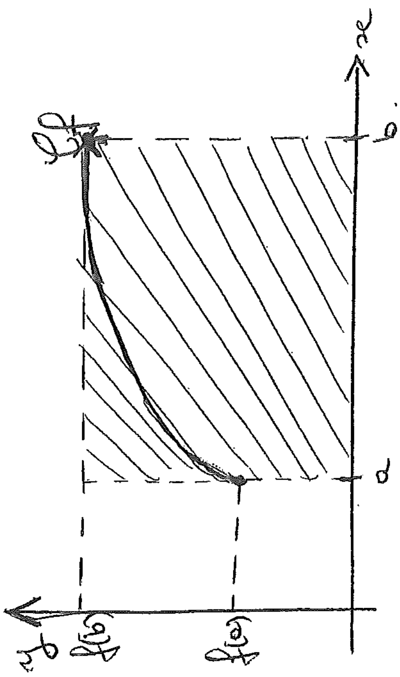
LAVIGNE Florian

N°236.

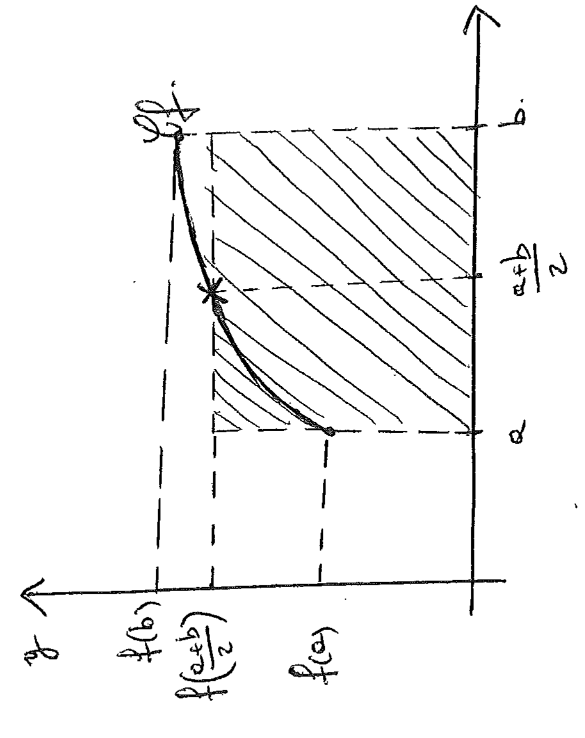
Annexe



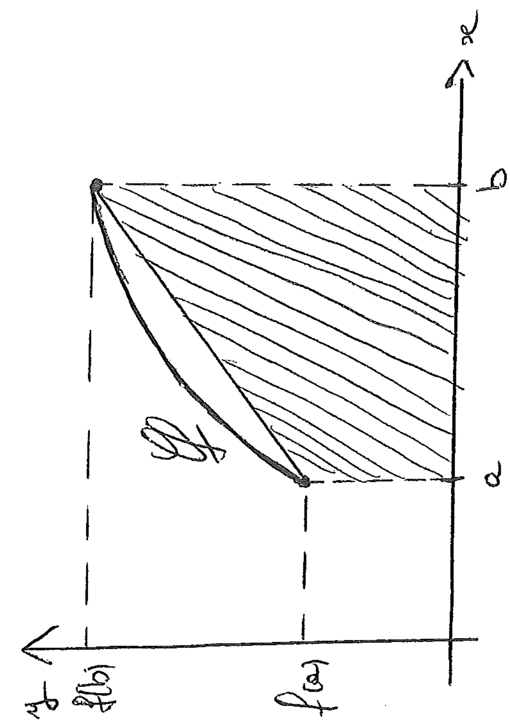
Dessin 1 : Rectangles à gauche



Dessin 2 : Rectangles à droite



Dessin 3 : Point milieu



Dessin 4 : Trapèzes

Questions

- Dém de Rappel 1 ?
- Exple 2 : Pas sr $[a,b]$ mais sr $[0,+\infty[$? lim.
  Voir Intégrales de Cauchy
  Manque des trucs ds le rappel (cas où f est pas déf, lims)
- Énoncé de la décomp. en élts simples :

$$\begin{cases} F = \frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q} \text{ où } \deg R < \deg Q \\ \hookrightarrow \exists (\lambda_{\alpha k}), \ \frac{R}{Q} = \sum_{\alpha \in E} \sum_{k=1}^{m_\alpha} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} \text{ où } E = \{\alpha \in \mathbb{C}, Q(\alpha) = 0\} \text{ de mult } m_\alpha \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ sur $\mathbb{C}$.

Et sur $\mathbb{R}$: plus $(X-a)^k$ ms poly irréd $\to$ possibilités deg 2.

- Exple 8 . Pour passer à la fin, bs de l'équiv de Wallis (n'est pas ds l'exple 7)
  $\hookrightarrow$ du travail, pas directement corollaire de l'exple 7
  - $n I_n I_{n-1} = \pi/2$
  - $(I_n) \searrow$ car $\forall t \in [0,\pi/2]$, $0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$
    $I_{n+1} I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$ $\leadsto \pi/2n$
  - $\sqrt{n} I_{2n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

    f exple : $x_i \to \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, $x_{j\neq i} \to \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ (?)

- Rappel 15 : $\int$ à l'intérieur (sr $\mathbb{R}^{n-1}$) $\exists$? Tjs ?
  À quoi sert l'hypothèse intégrable ? Et positive ?
  Exo || Norme euclidienne sr $\mathbb{R}^n$. Qd est-ce que $\|x\|_2^\alpha$ intégrable sr la boule ? et sr son compl ?

$$\int_{B(0,1)} \|x\|_2^\alpha dx = \int_{]0,1[\times]-\pi,\pi[} r^{\alpha+1} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 r^{\alpha+1} dr \to \alpha+1 > -1, \ \alpha > -2.$$

- Exple 31 : Pquoi le placer là ?
  "fonc° auxiliaire" pas forcmt adapter
  impt Pquoi . un peu contre-nature, normalemt lim de suites calculées et pas intégrale. Seule exple où c'est l'inverse.

| Rqs leçon |

- Rapport de Jury : "les candidats doivent présenter le cadre d'intégra° ds lequel ils se placent" → - intégrale de Lebesgue

↳ découper en : - fonc° sr segment borné (fonc° fondamental)
- φ de de limites, int. impropre $\frac{\sin t}{t}$

- Leçon intéressante ms pas facile à architecturer (← cata de méthodes)

Suggestion de plan (I) lien primitive / $\int$ = utilisé ds 99% des cas (m si après d'autres méthodes)

Théorème fondamental

2 manières : cas

↳ 1er résultat sr un segment f ... $\int_a^b f\,dt = F(b) - F(a)$

↳ 2ème résultat $\int_{\mathbb{R}}, \int_{]0,1[} = \lim \int_{x_n}^{y_n}$, $[x_n, y_n] \subset]a,b[$, $x_n \searrow a$, $y_n \nearrow b$

↑ Beppo-Lévi + cvgce dominée

→ applica° fondamentales. x^α, cos, $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}$, $\int_0^{\infty} P(t)e^{-t}$.

Se ramener à des primi :

- décomp. en élts simple

- IPP $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ bis !!

Pour faire sr $\mathbb{R}$: se placer ds $[-n,n]$ puis IPP puis cvgce dominée pr les 3 termes

- Chgt var en dim 1

- récurrence lien, eg. Wallis

En dim + que 1 : chgt de var et Fubini = outils fondamentaux. (cvt ??)

- Pas assez d'exples d'int de plusieurs variables $\mathbb{R}$

$\|x\|^\alpha$ int en $+\infty$ ssi $\alpha < -n$
en 0 ssi $\alpha > -n$

Chgt polaire/sphérique : Jacobien (... ρ^{n-1} cos sin ...

Quels exples où on passe en dim sup pour calculer une intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = ?$

$(\ldots)^2 = \int\int$ + passage polaire.

Exercices ← ou passer par la dérivé / ξ + IPP

- $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} e^{-ax^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+\frac{2i\pi x\xi}{a})}\,dx$

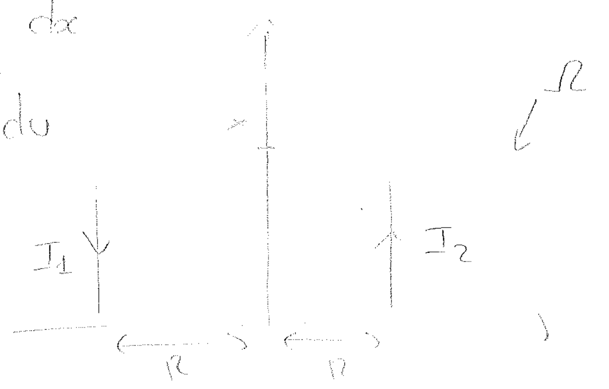
Or $x^2+\frac{2i\pi x\xi}{a} = \left(x+\frac{i\pi\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{i\pi\xi}{a}\right)^2$

$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+\frac{\pi\xi}{a})^2}\,dx$

$\mathcal{F}(e^{-ax})(\xi) = \frac{e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(u+\frac{i\pi\xi}{a})^2}\,du$

Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+\alpha)^2}\,du$, $\alpha \in i\mathbb{R}$

$= \int_{\Omega} e^{-u^2}\,du$



$\int_{I_1} e^{-z^2}\,dz + i\int_{\alpha}^{0} e^{-(R+ix)^2}\,dx$. $|-| \leq e^{-R^2+x^2}$
$\leq e^{x^2}$

$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$

Une autre méthode ? ← regarder l'équa° diff satisfaite, dérivation sous le signe intégral (exple typique de méthode équa diff).

- $I(x) = \int_0^{\pi} \log(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta$

$U_n = \sum_{k=0}^{n} \log\left(1-2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+x^2\right)$ $\quad\Sigma$ de Riemann

LAVIGNE Florian

N°236

DV1 : Intégrales de Wallis et de Gauss (Gourdon, Analyse - p163)

* Formule de récurrence des intégrales de Wallis

Par IPP, on a :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos . \cos^{n-1} = \cancel{[\sin \cos^{n-1}]_0^{\pi/2}} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 \cos^{n-2}$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} - (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n .$$

D'où $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

* Equivalent des intégrales de Wallis

On a $n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$.

Donc $(n I_n I_{n-1})$ est une suite constante. Ainsi $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

De plus, pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$

D'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est alors décroissante

Ainsi $I_{n+1} I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$. Or :

$$I_{n+1} I_n \sim \frac{\pi}{2n} \text{ et } I_n I_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n} .$$

Don $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$.

* Fonction de Gauss

La fonction log est concave. Donc pour $x > -1$,

$$\log(1+x) \leq x$$

Ainsi pour $0 \leq t \leq n^2$, on a : $\log(1-\frac{t^2}{n}) \leq -\frac{t^2}{n}$

et $\log(1+\frac{t^2}{n}) \leq \frac{t^2}{n}$.

D'où $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$

ou encore :

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = I_2$$

Par changement de variable :

- $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans I_1, on a : $I_1 = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,du = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$

  Donc $I_1 \sim \sqrt{n} . \frac{\sqrt{\pi/n}}{\cancel{2}}$ ainsi $I_1 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}(u)$ dans I_2, on a :

  $$I_2 = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,du \leq \sqrt{n}\, I_{2n-2}$$

  D'où $I_2 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi par théorème des gendarmes, on obtient :

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{2} .$$

Rqs leçon 4)

- Se ramener à une équa diff

$f = e^{-ax^2}$ $\quad f' = -2ax f$

→ transformée de Fourier : $\mathcal{F}(f')(\xi) = -\frac{2\pi^2}{a} \xi \mathcal{F}(f)(\xi)$ ← Fourier

$\xi = 0$ pour calculer la cte

↳ exple de 2 méthodes opposées lté (équa diff + $\mathcal{F}$ ou passe en $\mathbb{C}$)

↳ exo

- $\sum$ de $f_n(x)$

+ justifier échange de $\sum$ et d'int

- Variable $\mathbb{C}$ (??) — titre leçon !

↳ limite des résidus super pratique !

- Fubini = faire attention !

Les énoncer correctement

- formes diff ??

éventuellement si à l'aise Cauchy-queue

LAVIGNE Florian

N° 236

DVL : Calcul par Séries de Fourier (Cassini, Analyse 2) p 233

Posons $f(x) = \dfrac{1}{ch(a) - \sin(x)}$, Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, f est égale à sa série de Fourier. (par thm de cvgce normale) On exprime alors $f(x)$ en fonction de e^{ix}. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{ch\,a - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} = \frac{2ie^{ix}}{1 + 2ie^{ix} ch\,a - e^{2ix}}.$$

Posons $F(X) = \dfrac{2iX}{1 + 2iX ch\,a - X^2}$. On remarque que, si D est le dénominateur de F, on a :

$$D(ie^{a}) = D(ie^{-a}) = 0 \quad , \text{ grâce à } ch\,a = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}.$$

$2ch\,a = e^{a} + e^{-a}$

décomp en élts simples

Ainsi : $F(X) = \dfrac{-2iX}{(X - ie^{-a})(X - ie^{a})} = -\dfrac{i}{sh\,a}\left[\dfrac{e^{a}}{X - ie^{a}} - \dfrac{e^{-a}}{X - ie^{-a}}\right]$.

D'où : $f(x) = -\dfrac{i}{sh\,a}\left[\dfrac{e^{a}}{e^{ix} - ie^{a}} - \dfrac{e^{-a}}{e^{ix} - ie^{-a}}\right]$

On a : $\dfrac{e^{a}}{e^{ix} - ie^{a}} = \dfrac{i}{1 + ie^{-a + ix}} = i \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-ie^{-a}e^{ix})^n$, car $|ie^{-a}e^{ix}| < 1$ ($= e^{-a} < 1$ car $a > 0$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} e^{-na} . e^{inx}.$$

De même : $\dfrac{e^{-a}}{e^{ix} - ie^{-a}} = \dfrac{e^{-a} . e^{-ix}}{1 - ie^{-a} . e^{-ix}} = e^{-a} . e^{-ix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (ie^{-a}e^{-ix})^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^n e^{-(n+1)a} e^{-(n+1)ix}.$$

Donc $f(x) = \dfrac{-i}{sh\,a}\left(i + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} \left(i^{n+1} (-1)^n e^{inx} - i^{n-1} e^{-inx}\right)\right)$.

$$= \frac{1}{sh\,a}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} i^n \left((-1)^n e^{inx} + e^{-inx}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{sh\,a}\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} e^{-2pa} (-1)^p 2\cos(2px) + \sum_{p=0}^{\infty} 2 . e^{-(2p+1)a} (-1)^p \sin(2p+1)\right.$$

Les séries $\sum e^{-2pa} (-1)^p \cos(2px)$ et $\sum e^{-(2p+1)a} (-1)^p \sin[(2p+1)x]$ sont normalement convergentes. Ainsi :

$I_0 = \dfrac{1}{sh\,a}$; $I_{2p} = 2e^{-2pa} (-1)^p / sh\,a$; $I_{2p+1} = 0$.

Décomposi° en élts simples : $F(X) = \dfrac{\alpha}{x - ie^{a}} + \dfrac{\beta}{x - ie^{-a}}$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-2i(ie^{a})}{ie^{a} - ie^{-a}} = \dfrac{-ie^{a}}{\operatorname{sh} a} \\ \beta = \dfrac{-2i(ie^{-a})}{ie^{-a} - ie^{-a}} = \dfrac{ie}{\operatorname{sh} a} \end{cases}$$

Thm cvgce normale : fonc° 2π-pér, $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier cvge normalement vers f

$$\longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-inx} \quad \text{où } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx) \quad \text{où } \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x)\,dx \\ \beta_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x)\,dx \end{cases}$$

Dém : On majore brutalement le terme à l'intérieur de l'intégrale

$$S(f)(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) dx$$

Ici : cvgce normale ?

LAVIGNE Florian

N° 236

DV3 : Méthode des trapèzes (Cassini - Analyse 2 p17)

Formule : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

On calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx$.

$$\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \left[\frac{x-2a}{b-a}\cdot\frac{x}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-2ab-a^2+2a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

et

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \left[\frac{x-2b}{a-b}\cdot\frac{x}{2}\right]_a^b = \frac{-b^2-a^2+2ab}{2(a-b)} = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq f(a)\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx + f(b)\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx$

$$\simeq \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

Erreur : Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. Alors la sécante passant par $\binom{a}{f(a)}$ et $\binom{b}{f(b)}$ est d'équation :

$$y(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - \frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

Définissons $g : x \mapsto f(x) - y(x)$. Alors $g''(x) = f''(x)$ et $g(a) = g(b) = 0$. De plus :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| = \left|\int_a^b g(x)\,dx\right|.$$

On applique une double IPP à g :

$$\int_a^b g(x)\,dx = \cancel{\left[g(x)(x-m)\right]_a^b} - \int_a^b g'(x)(x-m)\,dx = -\left[g'(x)\left(\frac{x^2}{2}-mx+h\right)\right]_a^b + \int_a^b g''(x)\left(\frac{x^2}{2}-mx+h\right)dx$$

On choisit les constantes m et h telles que $\frac{x^2}{2}-mx+h = \frac{(x-b)(x-a)}{2}$

Ainsi : $\displaystyle\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \leq \|g''\|_\infty \int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{2}\,dx$

$$\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}\left[\frac{bx^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_a^b$$

$$\leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}\left(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - 3a^3\right) \leq \frac{(b-a)^3}{2}\|f''\|_\infty.$$