

NOM : COMETX Prénom : THOMAS Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 234 Espace L^p
Autre sujet : $1 \leq p < +\infty$

(X, d, μ) est un espace mesuré. On suppose connus les résultats de base de la théorie de la mesure. <u>I - Espace L^p</u> A. Définitions 1) Fonctions mesurables positives Def 1 Si $f \geq 0$ et mesurable on définit $\ f\ _p = \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p}$ si $p \in [1, \infty[$, $\ f\ _\infty = \inf \{ M \in [0, \infty] \mid \mu(\{x, f(x) > M\}) = 0 \}$ et le sup essentiel de f. Prop 2 $\ f\ _p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p. Théorème 3 Soient $f, f' \in [1, \infty]$. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (on dit que p et p' sont conjugués) et f, g mesurables positifs. Alors (Hölder) $\ fg\ _1 \leq \ f\ _p \ g\ _{p'}$ (Minkowski) $\ f + g\ _p \leq \ f\ _p + \ g\ _p$ 2) Fonctions à valeurs complexes Def 4 Si f est mesurable et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on note $\ f\ _p = \ f \ _p$ Def 5 $[L^p(X, d, \mu)]$ est l'ensemble de classe d'équivalences modulo égalité presque partout des fonctions mesurables complexes que $\ f\ _p < \infty$. On identifie toujours une fonction à sa classe d'équivalence.	Théorème 7 Soient $f, f' \in L^1, \infty$ conjugués alors (Hölder) si $f \in L^p, g \in L^q$, alors $fg \in L^1$ et $\ fg\ _1 \leq \ f\ _p \ g\ _q$ (Minkowski) si $f, g \in L^p$ alors $f + g \in L^p$ et $\ f + g\ _p \leq \ f\ _p + \ g\ _p$ Théorème 8 $(L^p(X, d, \mu), \ \cdot\ _p)$ est un espace vectoriel (m.g.) normé. Exemple 9. $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ de $\mathbb{R}^n$ est $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ de $\mathbb{R}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta_{\{0\}})$, densément et l'ensemble des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que $\sum_{n \geq 0} a_n < \infty$.
B. Convergence dans les L^p 1. Complète Théorème 10 (Riesz-Fischer) $(L^p, \ \cdot\ _p)$ est un espace de Banach Prop 11 Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors il existe une suite extraite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \xrightarrow{p.p.} f$ 2. Convergence dominée Théorème 12 Soit $f_n \xrightarrow{L^p}$ avec $f_n \in L^p$, il existe g dans L^p avec $f_n \leq g$ alors $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$ Exemple 13 $\mathbb{1}_{[0, n]} \in L^p(\mathbb{R})$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0, n]} \notin L^p(\mathbb{R})$	1. Complète Théorème 10 (Riesz-Fischer) $(L^p, \ \cdot\ _p)$ est un espace de Banach Prop 11 Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors il existe une suite extraite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \xrightarrow{p.p.} f$ 2. Convergence dominée Théorème 12 Soit $f_n \xrightarrow{L^p}$ avec $f_n \in L^p$, il existe g dans L^p avec $f_n \leq g$ alors $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$ Exemple 13 $\mathbb{1}_{[0, n]} \in L^p(\mathbb{R})$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0, n]} \notin L^p(\mathbb{R})$

Ref Folland, Calcul Intégral
Hirsch-Lacombe, Elt d'analyse
Brezis, Analyse Fonctionnelle

234 - Espace L^p

C - Parties denses dans L^p

Def 14 Une fonction étiquetée est une continue-linéaire linéaire de fonctions de la forme $A_i, A_i \in \mathcal{A}$.

Prop 15 Si $f = \sum_{i=1}^n a_i A_i, f \in L^p \Rightarrow \forall i, \mu(A_i) < \infty$

Théorème 16 L'ensemble des fonctions étiquetées de L^p est dense dans L^p ($p \in [1, \infty]$)

Théorème 17 $\mathcal{E} \subset (L^p(\mathbb{R}^n))^2$ (fonctions continues à support compact) est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p < \infty$.

Application 18 (Inégalité de Hölder) ($p, q \in [1, \infty]$) si $f \in L^p, g \in L^q$, alors $fg \in L^1$ par

$||fg||_1 \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty ||f(t)||_p ||g(t)||_q dt$ et aussi $||fg||_1 \leq \frac{1}{2} ||f||_p ||g||_q$

Application 19 Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p < \infty$,

$x \mapsto x \cdot f(x) \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \in L^p$ est uniformément continue. En particulier $||x \cdot f||_p \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow 0$.

D - Inclusions

Exemple 20 Si $p < q$, alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Théorème 21 Si $\mu(X) < \infty$ et si $p < q$ alors $L^q(X) \subset L^p(X)$ et $||f||_p \leq ||f||_q \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ pour tout f dans L^q .

Exemple 22 Si $\mu(X) = +\infty$ i.e. $X = \mathbb{R}, \mu = dx$

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \chi_{(0, \infty)} \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^q$ si $q > 1$

$\rightarrow \chi_{[0,1]} \in L^p$ si $p \geq 1$

Exemple 23 $X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n + \mathbb{R}$ application à $\rightarrow L^p(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$ si $n - \alpha p < m$

$\rightarrow L^p(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) \subset L^q(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$ si $n - \alpha p > m$

Théorème 24 Si $f \in L^p(X) \cap L^q(X), p < q$ alors $\forall r \in [p, q], f \in L^r(X)$

E - Dualité ($p < \infty, \mu$ σ -finie)

Théorème 25 Si μ est σ -finie et $p < \infty$ alors $(L^p)^*$ s'identifie isométriquement à L^q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) par $g \mapsto f_g$ où $f_g(f) = \int_X f g d\mu$ $\forall f \in L^p$

Corollaire 26 Pour $p \in [1, \infty], L^p$ est réflexif

Corollaire 27 Si $f \in L^p(X), ||f||_p = \sup_{g \in L^q, ||g||_q=1} \int f g d\mu$

Contre ex 28 (L^∞) $\neq L^1$.

L'application "limite" de limite des suites convergentes dans $\mathbb{C}$ ne prolonge en une application linéaire continue de $L^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui n'est pas représentée par $\mu \in L^1(\mathbb{R})$

F - Séparable

Théorème 29 Pour $p \in [1, \infty], L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable, mais pas $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

II - Le Cas de L^2

Théorème 30 $L^2(X, d\mu)$ est un espace de Hilbert

Théorème 31 Tout espace de Hilbert séparable de dimension ∞ est isomorphe isométriquement avec $L^2(\mathbb{N})$ (voir p. 111) peut être noté ℓ^2

Exemple de $L^2(\mathbb{T})$, les séries de Fourier (correspond à $\ell^2(\mathbb{Z})$) $L^2(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions 2π -périodiques de norme intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Def 32 Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ on définit la série de Fourier de f par $S_N f = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx}$ où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

234 - Espaces L^p

Théorème 33 (Parseval) Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \|f\|_2^2$

Théorème 34 (en) $n \rightarrow \infty$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$

Applications 35 $\rightarrow$ Calcul de série : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
 $\rightarrow$ Intégrale de Wallis : si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$
 ou $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$

III - Convolution et Applications

Def 36 f et g des fonctions mesurables à valeurs complexes $\in L^1 \rightarrow f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. On note $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$

Théorème 37 Si $f, g \in L^1$, alors f et g sont continus et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
 et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
 Rem 38 $(L^1, +, *)$ est une algèbre de Banach

Théorème 39 (Intégrabilité de Young) soif $f, g \in L^1, q \in [1, \infty]$ qd $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + 1$. Alors si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f * g$ existe presque partout et $f * g \in L^r$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 40 (Convolution L^p-L^p) ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$)
 Si $f \in L^p$ et $g \in L^p$ alors $f * g(x)$ existe partout, $f * g \in L^p$, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p$, $f * g$ est uniformément continue et si de plus $f, g \in C_c^\infty$ alors $(f * g)(x) \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$
 Prop 41 Si f et g sont à support compact et continus alors $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$
 Prop 42 Si $f \in L^p, g \in C^k$ alors $f * g \in C^k$

~~compact et~~ et val. n-indice de $f * g = f * g$
 Approximation de l'unité

Def 43 Une approximation de l'unité est une suite de fonctions φ_n d'intégrale 1 telle que $\forall \epsilon > 0, \int_{|x| > \epsilon} \varphi_n(x) dx \rightarrow 0$

Exemple 44 Si $n \in \mathbb{N}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[-\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}]}$
Théorème 45 Si f est une approximation de l'unité, et $p < \infty$, alors $f * f_n \rightarrow f$

Application 46 $D(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$

Application 47 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ compact et $\mathbb{R}$ alors f est limite uniforme de fonctions polynomiales

Def 48 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa transformée de Fourier par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$
Prop 49 Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$
Prop 50 Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi^n f(-x)$

Prop 51 Si $f \in L^1, \mathcal{F}(f)$ est continue et tend vers 0 à l'infini
Exemple 52 $f(x) = e^{-\alpha|x|^2}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}}$
Prop 53 $(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$ n'est pas d'unité

Théorème 54 (Inversion de Fourier)
 Si $f \in L^1$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1$ alors presque partout $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-x)$

Théorème 55 (Fourier - Plancherel)
 On plonge en un espace hilbertien L^2 isométrique de L^2
Application 56 Transformation de Fourier de L^2 de $\mathbb{R}^n$ dans L^2 de $\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme

DEV 2

Théorème de Riesz-Fischer

Thm $L^p(V, \mathcal{A}, \mu)$ est complet

Cas $p = +\infty$

Soit f_n une suite de Cauchy de L^∞ .

On pose $A_{m,n} = \{x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty\}$

$A_{m,n}$ est de mesure pleine, donc

$A = \bigcup_{m,n} A_{m,n}$ l'est. Dès lors $\forall x \in A$,

$f_n(x)$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$, on note $f(x)$ sa limite. f est mesurable.

$$\begin{aligned} \forall x \in A, |f(x)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq 1 \text{ pour } N \text{ assez grand}} + \|f_N\|_\infty \\ &\leq 1 + \sup_N \|f_N\|_\infty \\ &\quad \text{fin car } f_N \text{ est de Cauchy.} \end{aligned}$$

donc $f \in L^\infty$

De plus, Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\forall m, n \geq N, \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ on passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$, pour obtenir

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } |f(x)| \leq \varepsilon + \sup_{m \geq N} \|f_m\|_\infty$$

donc $f \in L^\infty$

Et de plus, $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ donc $\|f - f_m\|_\infty \rightarrow 0$ Donc f_n converge.

Cas $p < \infty$

• Soit f_n une suite de f.c.d. de L^p
on peut construire une suite extraite
 f_{n_k} telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 1/2^k$

• Poser $g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|(x)$

$g_n(x)$ est croissant donc admet
une limite n.ée $g(x) \in [0, \infty]$

• Par Beppo Levi, $\|g\|_{L^p} = \lim_n \|g_n\|_{L^p}$
 ≤ 1

donc $g < \infty$ presque partout

• Dans pp. x la série convergente
donc $\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ convergente

donc f_{n_k} convergente

Donc $f(x) = \lim f_{n_k}(x)$

• F.M.I. $\forall m, n \quad \int_X |f_m - f_n|^p dx \leq \varepsilon^p$

Prendre $m = n_k, k \rightarrow \infty$

donc $\int \liminf_k |f_{n_k} - f_m|^p dx \leq \liminf_k \int |f_{n_k} - f_m|^p dx$

"
 $\int |f - f_m|^p dx \leq \varepsilon^p$

donc $f - f_m \in L^p$ et

et donc $f \in L^p$ et de

plus $\left\{ \begin{array}{l} f_m \xrightarrow{L^p} f \\ m \rightarrow \infty \end{array} \right.$

$$\overline{D(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$$

Théorème Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour
 $p < \infty$.

Lemme Soit φ_h une approximation
de l'unité et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\|\varphi_h * f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{ie } \varphi_h * f \xrightarrow{L^p} f$$

démo $\|\varphi_h * f - f\|_{L^p}^p$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) f(x-t) dt - f(x) \right|^p dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) (f(x-t) - f(x)) dt \right|^p dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) dt \right) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) |f(x-t) - f(x)|^p dt dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dt dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dt dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_h(t) \underbrace{\| \tau_t(f) - f \|_{L^p}^p}_{= F(t)} dt$$

comme $F(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, il existe η tel que
si $|t| < \eta$ alors $F(t) < \varepsilon$

$$= \int_{|t| < \eta} \varphi_h \| \tau_t(f) - f \|_{L^p}^p dt + \int_{|t| \geq \eta} \varphi_h \| \tau_t(f) - f \|_{L^p}^p dt$$

$$\leq \varepsilon + 2^p \|g\|_p^p \int_{|H|>\frac{\varepsilon}{2}} \psi_k(t) dt$$

$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$\leq \varepsilon$ pour k assez grand.

Cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ Soit $\varepsilon > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tq $\|g - f\|_{L^p} \leq \varepsilon$

Alors en prenant ψ_k une approximation de 1 lisse à support compact.

on a $\psi_k * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi_k * g \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^p} g$

donc $\exists N$ tel que $\|\psi_k * g - g\|_{L^p} \leq \varepsilon/2$

Par la $\|g - f\|_{L^p} \leq \varepsilon$ d'où le résultat

Ca Ω quelconque Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$,
on définit, sur $\mathbb{R}^n$, $\tilde{f} = f \cdot 1_\Omega$

il existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$

on définit $\tilde{g} = 1_\Omega g$ (sur $\mathbb{R}^n$)

et on approche $\tilde{g}$ par $\psi_k * \tilde{g}$

il existe N tel que $\forall n \geq N_1$, $\text{Supp}(\psi_n * \tilde{g}) \subset \Omega$

et N_2 $\forall n \geq N_2$, $\|\psi_n * \tilde{g} - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ on a

$\rightarrow (\psi_N * \tilde{g})|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\rightarrow \|\psi_N * \tilde{g} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\psi_N * \tilde{g} - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\tilde{g} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Leçon 234: Espaces L^p , $1 \leq p \leq \infty$

I Questions

- Exemples d'applications du thm 46?
- Jensen?

dit 2

$\hookrightarrow \forall$ convexe $I \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^0$ à valeur de I μ mesure de proba
alors $\forall \int f d\mu \leq \int \varphi(f) d\mu$

Ici on l'applique à quoi? $| \cdot |^p$ convexe?

$\hookrightarrow$ composé de 2 fonc^o convexes $\rightarrow$ pas forcément convexe (eg $x^2(x-x)$)
en fait on l'applique à $x \mapsto x^p$, convexe (montrer d'abord II)

- thm 5 (Hölder & Mink) démo?

$\hookrightarrow$ convexité de $x \mapsto x^p$ pr Hölder
applic^o de Hölder pour Mink.

- thm 10 (Riesz-Fischer) Exemples d'applications?

- Vg si une fonc^o est de L^p & L^q alors elle est de L^r $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

- thm 17. Démon?

$\hookrightarrow$ régularité de la mesure de Lebesgue

- Appli 18. (Hardy). Démon?

- Exemple 23. Démon?

- thm 25. Démon?

$\hookrightarrow$ Rademacher-Mercoré

II Exercices

1) $\Phi: \begin{cases} L^{p'} \rightarrow (L^p)^* \\ g \mapsto (f \mapsto \int f g d\mu) \end{cases}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$\forall g$ Φ est une isométrie

ie $\|\Phi(g)\| = \|g\|_{p'}$

$p > 1$, norme

$p = 1$, G. finie et pas atteinte.

2) f mesurable positive $\int f^p d\mu = K < \infty$
 mg. $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$

III. Commentaires

- Bcp de contenu. Savoir répondre aux questions.
- Δ evn + appli-l ∞ entre ces evn : les normes ne sont pas forcément atteintes !! (eg Hardy : pas atteinte)
 Savoir calculer une norme d'appli-l ∞
- Hardy. Clinique. Bien savoir répondre
- Espaces réflexifs : déconseillés.
 $\hookrightarrow$ br-dual
- Radon-Nikodym : gros thm, peut faire un dirk
- Rapport fong : savoir montrer l' $\in$ des L^p en $p < \infty$.

IV. Propositions

- Commencer par L^2 qui correspond à la théorie de l'intégr.
- Généraliser $p > 1$. Minkowski. (= Hölder) permet de montrer Δ (déjà difficile)
 Bn de $x \mapsto x^p$ conv pour $p \geq 1$
 Justifier L^∞ . Espaces conjugués ? Que mettre en face de L^1 .
 Exple $L^{1/2}$
- Inclusion des L^p en mesure finie :
 - * $L^\infty \subset L^p$
 - * $L^p \subset L^1$: $f^p = f^p \chi_{|f| \leq 1} + f^p \chi_{|f| > 1}$
 $\leq 1 + f^q$
 $f_- \leq |f| + f_- =$
- Parties denses. Impl $\rightarrow$ signal : $\sum a_i$ (intégr)
 $\rightarrow$ lebesgue : $\mathcal{C}_c$

- Convolution
- Series de Fourier

Cas 12
Nikolai

