233

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Dans toute la leçon, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On étudiera deux classes de problèmes
→ Résolution de $Ax = b$, $b \in K^n$, $A \in GL_n(K)$
→ Recherche d'éléments propres de A.

I - Rayon spectral, conditionnement

1. Normes matricielles

Def 1 Soit $\|.\|$ une norme sur K^n, on définit sa norme subordonnée, notée de la même façon, sur $M_n(K)$, par
$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

Def 2 Le rayon spectral de A est $\sup \{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$

Prop 3 Une norme subordonnée vérifie
$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Ex 4 $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$
$\|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}|$
$\|A\|_\infty = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$

Def 5 ~~On~~ Le conditionnement pour $\|.\|$ ~~d'une~~ de $A \in GL_n(K)$ est $cond_{\|.\|}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

Ex 6 Si A est ~~dia~~ normale, alors
$cond_2(A) = \dfrac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}$ où $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

~~Prop~~ **7** - $cond(A) \geq 1$ $\forall A \in M_n(K)$
- U unitaire $\Rightarrow$ $\forall A \in M_n(K)$, $cond_2(AU) = cond_2(A)$

Prop 8 Si $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$
alors $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A) \dfrac{\|\delta b\|}{\|b + \delta b\|}$

Prop 9 Si $Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \delta x) = b$
alors $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A + \delta A\|}$

Rem 10 Si $cond(A)$ est proche de 1, alors A est dite bien conditionnée, i.e. peu sensible à la propagation d'erreur

Exemple 11 Le schéma d'Euler implicite pour l'équation de la chaleur mène à la résolution d'un système de la forme $\begin{pmatrix} 1+2c & -c & & \\ -c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -c \\ & & -c & 1+2c \end{pmatrix} x = b$.

Comme on résoud plusieurs fois le système pour voir l'évolution du résultat, il vaut mieux avoir un faible conditionnement.

2. Localisation de valeurs propres

~~Motivatio~~

Exemple 12 On sait que le laplacien défini de $H^2([0,1]) \cap H_0^1([0,1])$ dans $L^2([0,1])$ fournit une base hilbertienne de L^2 par ses vecteurs propres. Il est intéressant d'en chercher les valeurs et vecteurs propres et ceci est possible en étudiant le problème discrétisé.

Prop 13 Soit A une matrice diagonalisable et P telle que $PAP^{-1} = diag(\lambda_i)$

et $\|\cdot\|$ une norme subordonnée telle que $\|\mathrm{diag}(d_i)\| = \max_i |d_i| \ (\forall d_i)$, alors $Sp(A+\delta A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}(\lambda_i, \mathrm{cond}(P)\|\delta A\|)$

Def 14 $A \in M_n(K)$ est dite à diagonale strictement dominante si $\forall i$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Théorème 15 (Gershgorin) si A est à diagonale strictement dominante, $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$

II - Méthodes itératives pour $Ax = b$

1. Inconvénients des méthodes directes

Il existe des méthodes directs de résolution, elles ont cependant, quelles qu'elles soient (Pivot de Gauss, Factorisations LU ou Choleski), des inconvénients : → elles sont coûteuses : $O(n^3)$ opérations
→ peu stables : risques de division par des petits nombres

2. Cadre théorique

On écrit $A = M - N$ avec M inversible, alors $Ax = b \Leftrightarrow x = M^{-1}(Nx + b)$, problème de point fixe que l'on résout par itération grâce au théorème de Picard.

DEV 1

Théorème 16 (Householder)
$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \text{ norme subordonnée}} \|A\|$

Théorème 17 La méthode itérative associée à $A = M - N$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

Rem 18 Dans l'algorithme on a $\|x^m - A^{-1}b\| = O(\rho(M^{-1}N))$

Def 19 Le taux de convergence d'une méthode itérative est $\tau = -\log \rho(M^{-1}N)$. Si deux méthodes ont deux taux $\tau_1 = 2\tau_2$, la première converge deux fois plus vite

Notation 20 On écrit $A = \begin{pmatrix} d_1 & & -F \\ & \ddots & \\ -E & & d_n \end{pmatrix} = D - E + F$
De plus on suppose D inversible

3. Méthode de Jacobi

$M = D \quad N = E + F$
alors $x_i^{(m+1)} = (a_{ii})^{-1} (b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(m)})$

Théorème 21 Si A est à diagonale fortement dominante, alors $\rho(J = M^{-1}N) < 1$

4. Méthode de relaxation

On fixe $\omega \in K$ et $M = \frac{1}{\omega} D - E$, $N = (\frac{1-\omega}{\omega}) D + F$, on a alors
$x_i^{(m+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} + (\frac{1-\omega}{\omega}) a_{ii} x_i^{(m)}]$

Rem 22 On ne calcule pas M^{-1}

Théorème 23 • Si A est à diagonale fortement dominante alors $\rho(\mathcal{L}_\omega = M^{-1}N) < 1$ pour $\omega \in]0,1]$
• Si $A \in HDP_n$, $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ si $|\omega - 1| < 1$

Rem 24 Pour $\omega = 1$ on parle de méthode de Gauss-Seidel.

5. Etude du cas tridiagonal

Rem 25 En EDP, les matrices sont souvent tridiagonales

Lemme 26 Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $C = C_0 + C_- + C_+$ une matrice tridiagonale, alors $\det C = \det(C_0 + \frac{1}{\mu} C_- + \mu C_+)$

(preuve : on conjugue par $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mu & \\ & & \mu^2 \ldots \end{pmatrix}$)

DEV 2

Prop 27 Si A est tridiagonale alors $\chi_{\mathcal{L}_\omega}(\mu^2) = (\mu\omega)^n \chi_J\left(\frac{\mu^2+\omega-1}{\mu\omega}\right)$

Cor 28 $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$ donc la méthode de Jacobi converge ssi celle de Gauss Seidel aussi. Auquel cas celle de Gauss Seidel est 2 fois plus rapide

Théorème 29 Si A est tridiagonale et si $Sp(J) \subset]-1,1[$ alors (pour ω réel), $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ ssi $\omega \in]0,2[$. De plus le taux de convergence est maximal pour $\omega_J = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$ et alors

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_J}) = \omega_J - 1 = \frac{1-\sqrt{1-\rho(J)^2}}{1+\sqrt{1+\rho(J)}^2}$$

Ex 30 pour $n = 10$, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & \ddots \end{pmatrix}$, $\rho(J) \simeq 0{,}96$

donc $\omega_J \simeq 1{,}5625$

6. Lien avec l'optimisation : gradient conjugué

Prop 31 Si $A \in SDP_n$, $Ax = b \Leftrightarrow x$ minimise $J : \tilde{x} \mapsto \frac{(A\tilde{x},\tilde{x})}{2} - (b,\tilde{x})$ sur $\mathbb{R}^n$

Algorithme 32 on fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- $r_0 = b - Ax_0$, $p_0 = r_0$
- par récurrence (tant que $r_k \neq 0$)

$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{(Ap_k,p_k)}$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$,

$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$, $\beta_{k+1} = \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2}$

$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$

Théorème 33 La méthode du gradient converge en au plus n itérations

Rem 34 On l'utilise comme une méthode itérative

IV - Recherche d'éléments propres

1. Méthode QR

Prop 35 Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists! (Q,R)$, Q unitaire, R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $M = QR$ (Algorithme en annexe) et la factorisation se fait en $O(n^3)$ opération

Algorithme 36 On pose $A_1 = A$, on décompose $A_m = Q_m R_m$ et on pose par récurrence $A_{m+1} = R_{m+1} Q_{m+1}$

Théorème 37 Si A est inversible et ses valeurs propres sont de modules différents ie $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ alors si P^{-1} a une décomposition LU on a

$\rightarrow \forall i$, $A^{(k)}_{i,i} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_i$ $\quad \forall i,j, j>i$, $A^{(k)}_{i,j} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Def 38 $A \in M_n(K)$ est de Hessenberg si $j - k \geq 2 \Rightarrow m_{jk} = 0$

Théorème 39 Toute matrice ~~complexe~~ carrée est unitairement semblable à une matrice de Hessenberg.

Rem 40 Si A est de Hessenberg, les hypothèses du théorème 37 sont vérifiées.

2. Méthode de la puissance

Algorithme 41 On fixe $x^0 \in K^n$ et par récurrence on construit $x^{(m)} = Mx^{(m-1)} / \|Mx^{(m-1)}\|$

Théorème 42 Si A a une seule valeur propre λ de module $\rho(A)$ et si x_0 n'appartient pas à l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(A-\lambda)$ alors

- $\|Mx^{(k)}\| \to \rho(A)$ · x^k converge vers v tel que $Mv = \lambda v$ et $\|v\| = 1$
- on en déduit λ

Rem 43 Si A est diagonalisable et μ est la valeur propre de 2ème plus grand module alors la convergence est de l'ordre de $\left(\cancel{\rho(A)} \frac{|\mu|}{|\lambda|}\right)^k$

App 44 Recherche de mesure invariante de chaîne de Markov.

Decomposition QR

- Methode de Householder

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & * \\ a_1 & \alpha_2 & & & \\ & a_2 & \alpha_3 & & \\ & & a_3 & \ddots & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

on pose $H_1 = I_n - 2 \frac{vv^*}{v^*v}$

où $v = a_1 + \mathrm{sgn}(\alpha_1) \|a_1\|_2 e_1$

et on pose $\begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = H_1 A \end{cases}$

et même ~~pa~~ de proche en proche

on pose $H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & I - 2\frac{vv^*}{v^*v} \end{pmatrix}$

avec $v = a_2 + \mathrm{sgn}(\alpha_2) \|a_2\|_2 e_k$

Alors finalement $A_n = H_{n-1} \cdots H_1 A$

dès lors ~~A_n~~

$R = A_n$ est triangulaire supérieure

$Q = (H_{n-1} \cdots H_1)^{-1} = H_1 \cdots H_{n-1}$

est unitaire

et $A = QR$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ Trouver un équivalent de

$\inf_{\substack{\Sigma \subseteq [0,1]^d \\ \# \Sigma = N}} \int_{[0,1]^d} d(x, \Sigma)\, dx_1 \ldots dx_d$ quand N tend vers l'∞