NOM : LAVIGNE **Prénom :** Florian **Jury :**

230

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse** N° 230

Sujet choisi : Séries de nombres réels ou complexes - Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques - Exemples

Autre sujet :

pquoi pas juste evn ?

On considère ici un ev E.

I - Introduction

Déf 1 : Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général (u_n) la suite (S_n) définie par $S_n := u_0 + \dots + u_n$, pour tout n.
On la note $\sum u_n$. On appelle S_n somme partielle d'indice n.

Déf 2 : Soit E evn. On dit que la série $\sum u_n$ converge, si la suite (S_n) converge.
La limite, appelée somme de $\sum u_n$, est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Déf 3 : Si $\sum u_n$ cv, on appelle reste d'indice n :
$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k := \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Ex 4 : • Série arithmétique : $\sum n$ dv de sommes partielles valant $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

• Série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$
$\sum q^n$ cv $\iff |q| < 1$.
Les sommes partielles sont $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Si $|q|<1$, la somme vaut $\frac{1}{1-q}$.

Prop 5 : Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors :
$$\sum (u_{n+1} - u_n) \text{ cv} \iff (u_n) \text{ cv}.$$

Prop 6 : Critère de Cauchy
Soit $\sum u_n$ à valeurs dans un Banach.
Alors :
$$\sum u_n \text{ cv}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| < \varepsilon$$

Prop 7 : Si $\sum u_n$ cv, alors $\lim u_n = 0$

Déf 8 : Soit $\sum u_n$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$ ev de Banach.
Si $\sum \|u_n\|$ cv, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Prop 9 : Un série absolument convergente converge.

II - Séries réelles à termes positifs

Prop 10 : Soit (u_n) positive. La série $\sum u_n$ cv ssi (S_n) est majorée.

Cor 11 : Soit $(u_n), (w_n)$ avec $0 \leq u_n \leq w_n$ $\forall n$.
(i) Si $\sum w_n$ cv, alors $\sum u_n$ cv.
(ii) Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum w_n$ dv.

Th 12 : Soit $\sum u_n$ et $\sum w_n$ à termes positifs.
(i) Si $w_n = O(u_n)$, $\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum w_n$ cv.
(ii) Si $w_n \sim u_n$, $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.
Si elles convergent $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} w_k$. Sinon $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} w_k$.

Ex 13 : $\sum \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + O(1/n)$.

Rq 14 : Il existe des suites tendant vers 0 dont la série dv.

Th 15 : Critère de condensation de Cauchy.
Soit (u_n) décroissante réelle tendant vers 0.
Soit $p \geq 2$ entier. Alors :
$$\sum u_n \text{ cv} \iff \sum p^n u_{p^n} \text{ cv}.$$

DV 1

Cor 16 : Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum \min(u_n, 1/n)$ dv.

Cor 17 : Séries de Riemann
$$\sum 1/n^{\alpha} \text{ cv} \iff \alpha > 1.$$

Ex 18 : Formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Th 19 : Comparaison série - intégrale
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante continue par morceaux
Alors $U_n = f(0) + \dots + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$ converge.
Ainsi : $\sum f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse N° 230

Sujet choisi :

Autre sujet :

230

Cor 20 : Séries de Bertrand

$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ cv $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Cor 21 : Si $\alpha > 1$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Prop 22 : Règle de d'Alembert (Critère)

Soit $\sum u_n$ à termes positifs avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$

(1) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ cv (2) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ dv

(3) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire.

Ex 23 : * $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ permet d'étudier (3)

* $\sum \frac{1}{n!}$ cv.

Prop 24 : Règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ à termes positifs, avec $\sqrt[n]{u_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$

(1) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ cv. (2) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ dv

(3) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire.

Ex 25 : • $u_n = 1$. Alors $\sum u_n$ dv et $\sqrt[n]{u_n} = 1$.

• $u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$. Alors $\sum u_n$ cv et $\sqrt[n]{u_n} = 1$.

• $u_n = e^{-n}$. Alors $\sum e^{-n}$ cv, car $\sqrt[n]{u_n} \to e^{-1} < 1$

III - Séries semi-convergentes

A) Séries alternées

Déf 26 : Une série $\sum u_n$ est alternée si :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$.

Th. 27 : Critère des séries alternées

Soit (a_n) à termes positifs, décroissante tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n a_n$ cv et :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq a_{n+1}$

Ex 28 : $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ vérifie le critère. On aura, via les séries entières : $\pi = 4 \cdot \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Rq 29 : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv mais n'est pas absolument convergente

Déf 30 : Une série cv mais non abs. cv. est dite semi-convergente.

B) Transformation d'Abel.

Déf 31 : Soit $\sum u_n$ avec : $u_n = \alpha_n w_n$, $\forall n$.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. La transformée d'Abel de $\sum u_n$ est :

$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$.

Rq 32 : Equivalent à une IPP.

Cor 33 : Règle d'Abel

Soit $\sum u_n$ à valeurs dans un Banach

Supposons que $u_n = \alpha_n \cdot w_n$, avec :

* (α_n) décroissante et $\alpha_n \to 0$

* $\sum w_n$ bornée.

Alors $\sum u_n$ cv.

Ex 34 : $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ cv $\forall \alpha > 0$.

car $|1 + \dots + e^{in\theta}| = \frac{|1 - e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{1}{\sin \theta/2}$

IV - Opérations sur les séries

A) Séries commutativement convergentes.

Déf 35 : Une série $\sum u_n$ est commutativement cv. si :

2/3

NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse N°230

Sujet choisi :

Autre sujet :

pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\sum u_{\varphi(n)} \text{ cv.}$$

Rq 36 : Une série commutativement convergente cv.

Th 37 : Une série absolument cv $\sum u_n$ à valeurs dans un Banach est commutativement convergente. De plus, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$.

B) Produits de Cauchy

Th 38 :

Soit $\sum a_n$, $\sum b_n$ abs. cv. à valeurs dans une algèbre normée. Alors $\sum c_n$ définie par :

$$\forall n, \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

appelée produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est absolument cv. De plus, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

Ex 39 : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par critère de d'Alembert, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ existe.

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

On définit le produit de Cauchy de $f(x)$ et $f(y)$ par $\sum c_n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

D'où $f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = f(x) f(y)$.

Alors $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^x$, car f est continue

On définit $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, et f est appelée exponentielle.

cf Séries doubles

Th 40 : Fubini

Soit $(u_{p,q})_{p,q}$ à valeurs dans un Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ abs. cv et $\sum_q \sum_p \|u_{p,q}\|$ cv.
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ abs. cv et $\sum_p \sum_q \|u_{p,q}\|$ cv.

Dans ce cas on a : $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$.

V - Applications

A) Nombres de Liouville

Th 41 : Soit $(u_n) \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$ strict^t positive à partir d'un certain rang. Soit $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{10^{n!}}$ appelé nombre de Liouville et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^{k!}}$. Alors x est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

→ pas $\sqrt{\ }$ d'un poly si $\mathbb{Z}[X]$

B) Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x

Th 42 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, σ_n = nbre de div. de n dans $\mathbb{N}$

Si $x \in [1, +\infty[$, on définit $F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \sigma_n$

Alors : $F(x) = x \ln x + (2\gamma - 1) x + O(\sqrt{x})$

DV2

DV3

3/3

(230)

Retours leçon

→ Ne pas écrire le plan ni des thm ni rien que et de le plan au tableau

→ Utiliser le tps gagné pour motiver les ≠tes prop.

eg. pquoi utile de se ramener aux intégr. → cvgce + facile à déterminer

→ encore + d'exple

eg. Abel permet aussi de dvpper des dvpmt asymptotique

→ peut + dvper les ccles

→ Peut aussi mettre le thm de Césaro

→ Calculs de Σ – peut faire mention des séries entières et séries de Fourier (en exple par exple)

Exercices

- $\frac{1}{n} \sim \ln(1+1/n) \Rightarrow \sum 1/n$ et $\sum \ln(1+1/n)$ de même nature

$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k) = \ln(n+1) - \ln(2) \sim \ln(n) \Rightarrow$ dv.

$u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)$. $\quad v_n = u_n - 1/n$ Ces 2 suites sont adj. limite γ

$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n) = 1/(n+1) - \ln(1+1/n)$

$= 1/(n+1) - [1/n - 1/(2n^2) + o(1/n^2)] = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$

$= -\frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$

- u_n suite et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable ($\mathcal{C}^1$) alors $\sum_{n=0}^{E(x)} u_n \varphi(n) = \varphi(x) \sum_{n=0}^{E(x)} u_n - \int_1^x \varphi'(t) \sum_{n=0}^{E(t)} u_n \, dt$

Exercices

(généralisa° de Riemann)

$\sum u_n$ cv ms $\sum |u_n|$ dv.

→ Exple série non commutativement cv : alternées (certaines)

Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sum u_n$ (semi. cv.) Mq $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij,

Thm de réarrangement de Steinitz || $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \alpha$.

Idée $\sum u_n^+ \to +\infty$ et $\sum u_n^- \to -\infty$ + utiliser ça pr rester autour de α

$u_n^+ = \max(u_n, 0)$, $u_n^- = \min(u_n, 0)$

* mq $\sum u_n^+ \to +\infty$ $\quad u_n^+ = \max(u_n, 0) = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$

si cv. alors $\sum |u_n| \to 0$. abs.

$\hat{}$ chose pour $\sum u_n^- \to -\infty$

* idée. | On somme les termes + jusqu'à dépasser α.
| On somme ensuite les termes − jusqu'à dépasser α de l'autre sens
| On répète à les termes +

$I^{+/-} = \{n \in \mathbb{N},\ u_n > \backslash \leq 0\}$ $\quad \psi^{+/-} : \mathbb{N} \to I^{+/-}$

$$\varphi : n \mapsto \begin{cases} \psi^+(n) & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} u_{\varphi(k)} < \alpha \\ \psi^-(n) & \text{si } \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} u_{\varphi(k)}}_{= \omega_{n-1}} \geq \alpha \end{cases} \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bij.}$$

Mq $\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \to \alpha$

Soit $\varepsilon > 0$. $\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} - \alpha\right| = |u_{\varphi(n)} + \omega_{n-1} - \alpha|$

[$\sum u_n$ cv dc $|u_n| \to 0$]

Culture G | Et si u_n pas $\mathbb{R}$? ($\mathbb{C}$ ou ds en ev. gqe)
| $\{u_{\varphi(n)}\}$ = espace affine
| Et si on Banach ? (Hilbert par exp [illegible] de [illegible])

→ C exple de Fubini. Exple où les 2 Σ cv ms pas abs. et où l'échange est pas bon.

$u_{pq} = 1$ si $p = q$ / 0 si $p > q$ / $(-1)/2^{q-p}$ si $p < q$

$\sum_{p=0}^{q} u_{pq} = -\sum_{p=0}^{q-1} 1/2^{q-p} + 1 = 1 - \frac{1}{2^q}\sum_{p=0}^{q-1} 2^p$

$= 1 + \frac{1-2^p}{2^q} = 1/2^q$

$\sum_q \sum_p = 2 \neq 0 = \sum_p \sum_q$

| $\sum_{q=0} \sum_p = 2$
| $1 - 2^p \sum_{q=p} 1/4$ [illegible] 2^p [illegible] ≤ 0

| Dvts |

- Ne pas avoir peur d'utiliser des outils pas de la leçon (série entière, analyse $\mathbb{C}$, ...)
- Dvts possibles :
  * Thm taubérien fort (Bourdon)
  * $\sum 1/p$ div. Plusieurs méthodes   C'est simple que le livre d'arithmétique
    → prdt eulérien
    →
  * Dvt d'Euler MacLaurin

[Exercice] $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. $S_n = \# \underbrace{\{(n_1, \dots, n_k)}_{\in \mathbb{N}^k}, \alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_k n_k = n\}$

Mq. $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \prod_{i=1}^{k} 1/(1-x^{\alpha_i})$

Peut être utilisé pr en déduire un équiv asympt. de S_n qd $n \to \infty$

On peut dvper en série entière $\frac{1}{1-x^{\alpha_i}} = \sum_{n_i=0}^{\infty} x^{\alpha_i n_i}$

Faire $k=2$ pour voir ce qu'il se passe

LAVIGNE Florian N° 230

DV1 : Critère de condensation de Cauchy (Cassini - Analyse, tome 1, p 147-148)

Th : Soit (u_n) réelle décroissante tendant vers 0.
Soit $p \geq 2$ entier. Alors $\sum u_n$ et $\sum p^n u_{p^n}$ ont même nature.

Dém : Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $p^n \leq k < p^{n+1}$.
On définit $v_k = u_{p^n}$ et $\omega_k = u_{p^{n+1}}$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\omega_k \leq u_k \leq v_k$

Ainsi $(p^{n+1} - p^n) u_{p^{n+1}} = \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} \omega_k \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq \sum_{K=p^n}^{p^{n+1}-1} v_k = (p^{n+1} - p^n) u_{p^n}$

Cela revient à :

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}_{cste} \overbrace{p^{n+1} u_{p^{n+1}}}^{z_{n+1}} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq \underbrace{(p-1)}_{cste} \overbrace{p^n u_{p^n}}^{z_n}.$$

$z_n := p^n u_{p^n}$

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on a que $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n u_{p^n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k$ sont de même nature.

On conclut, par sommation par paquets, que :

$$\sum p^n u_{p^n} \text{ cv} \iff \sum u_n \text{ cv}.$$

☒

Application :
Soit (u_n) réelle décroissante tendant vers 0.
Si $\sum u_n$ dv, alors $\sum \min(u_n, 1/n)$ dv.

Dém : Raisonnons par l'absurde.
Posons $v_n = \min(u_n, 1/n)$.
Or (v_n) vérifie les hypothèses du critère précédent.
Donc $\sum 2^n v_{2^n}$ cv. Or $2^n v_n = \min(2^n u_{2^n}, 1)$.
A partir d'un certain rang, on a alors
$2^n v_n = 2^n u_{2^n}$.
Ainsi $\sum 2^n u_{2^n}$ cv, ce qui contredit le critère de condensation appliqué à (u_n).

☒

Applica° 2 : $\alpha \in \mathbb{R}$ $\sum 1/n^\alpha$ cv $\Leftrightarrow \sum \frac{2^n}{2^{n\alpha}}$ cv $\Leftrightarrow \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$

→ Un peu court

→ Pas bs de réécrire le thm au tableau ⇒ gain tps + place

LAVIGNE Florian (N° 230)

DV2 : Nombres de Liouville (Cassini - Analyse, Tome 1, p 25-26)

Lemme 1 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, $m = \deg P$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$.

Alors : $\exists k > 0$, $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap]x-1 ; x+1[$,

$$P\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0 \Rightarrow \left| x - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{k}{|b|^m}.$$

Dém : Soit $I =]x-1 ; x+1[$. Soit $M = \sup_I |P'|$

Par théorème des accroissements finis :

$$\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|P(x) - P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq M . \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Or $b^m P\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$ et $b^m P\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$.

Donc $\left|b^m P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geq 1$.

Enfin : $\left| x - \frac{a}{b} \right| \geq \frac{1/M}{|b|^m}$.

Lemme 2 : On prend les mêmes notations que dans le théorème 41.

Alors $|x - s_n| \leq \frac{1}{10^{n.n!}}$.

Dém : * Vérifions que x est bien défini. En effet :

$$0 \leq \frac{u_n}{10^{n!}} \leq \frac{9}{10^{n!}}$$

Par le critère de d'Alembert, on a que $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ cv.

Par le cor 11, $\sum \frac{u_n}{10^{n!}}$ cv.

* $|x - s_n| = x - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{u_k}{10^{k!}}$.

Or pour $k \geq n+1$, on a l'inégalité : $k! \geq k . n!$

Donc $|x - s_n| \leq 9 \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k = 9 \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1} . \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{n!}}} = \frac{1}{10^{n.n!}} \frac{9}{10^{n!} - 1}$ ≤ 1.

D'où le lemme.

* Vérificat° x $\exists$: $0 \leq \frac{u_n}{10^{n!}} \leq \frac{9}{10^{n!}}$

Critère d'Alembert : $\frac{1/10^{(n+1)!}}{1/10^{n!}} = 10^{n! - (n+1)!} \to 0$

Démonstration du th. 41 :

* Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, $\deg P = m$, avec $P(x) = 0$

Or $s_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $s_n \to x$. Donc : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $s_n \in \mathbb{Q} \cap]x-1 ; x+1[$

Comme $P \neq 0$, il existe un voisinage U de x, tel que P ne s'annule qu'en x. Soit $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \geq \tilde{N}$, $s_n \in \mathbb{Q} \cap U \cap]x-1 ; x+1[$.

Par les lemmes précédents : $\frac{1}{10^{n.n!}} \geq |x - s_n| \geq \frac{k}{(10^{n!})^m}$, $\forall n \geq \tilde{N}$.

Alors $k^{-1} \geq 10^{n!(n-m)}$ avec $10^{(n-m).n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

On obtient une contradiction.

<u>Rq</u>. Au lieu de prendre t_0 on peut prendre t qcq. → m̃ démo
Permet la construc° de nbres transcendants

→ Eviter les abréviat° svt non-standard
Faire apparaître à l'écrit tts les connec° logiques
→ Un peu court

LAVIGNE Florian

N° 230

DV3 : Nombre moyen de diviseurs des entiers inférieurs à x

(Cassini - Analyse, Tome 1, p 172 - 174)

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lemme : $E[y] \underset{y\to\infty}{\sim} y$; Dém : $1 - \frac{1}{y} < \frac{E[y]}{y} \leq 1$.

Démonstration de Th.42 :

On a : $\displaystyle F(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \tau_n = \sum_{1\leq n\leq x} \sum_{d|n} 1$

$$= \sum_{\substack{1\leq n\leq x \\ d|n}} 1 = \sum_{\substack{1\leq d,d'\leq x \\ d.d'\leq x}} 1 = \sum_{1\leq d\leq x} \sum_{\substack{1\leq d'\leq x \\ d'\leq x/d}} 1.$$

$$= \sum_{1\leq d\leq x} \sum_{d'=1}^{E[\frac{x}{d}]} 1 = \sum_{1\leq d\leq x} E\left[\frac{x}{d}\right].$$

Or $\frac{x}{d} - 1 < E\left[\frac{x}{d}\right] \leq \frac{x}{d}$.

Donc $\displaystyle\sum_{1\leq d\leq x} \left(\frac{x}{d} - 1\right) \leq F(x) \leq \sum_{1\leq d\leq x} \frac{x}{d}$.

$$x \sum_{d=1}^{E[x]} \frac{1}{d} - E[x] \leq F(x) \leq x \sum_{d=1}^{E[x]} \frac{1}{d}. \quad (*)$$

Par le rappel, on a : $\displaystyle\sum_{d=1}^{E[x]} \frac{1}{d} \sim \ln E[x] \sim \ln x$.

Donc $F(x) \sim x \ln(x)$.

On souhaite un DL en $O(\sqrt{x})$. Or l'encadrement $(*)$ est trop grossier. La différence entre les bornes est en $O(x)$. L'astuce est de couper la somme en $\sqrt{x}$.

Donc $$F(x) = 2 \sum_{\substack{d\leq\sqrt{x} \\ d.d'\leq x}} 1 - \sum_{d,d'\leq\sqrt{x}} 1.$$

$$= 2 \sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} E[x/d] - \left(E[\sqrt{x}]\right)^2.$$

Alors $$F(x) = 2x \sum_{d=1}^{E[\sqrt{x}]} \frac{1}{d} + O(\sqrt{x}) - (x + O(\sqrt{x})).$$

$$= 2x \left(\ln[E(\sqrt{x})] + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(\sqrt{x}) - x.$$

$$= 2x \ln(\sqrt{x} + O(1)) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

Or $\ln(\sqrt{x} + O(1)) = \ln(\sqrt{x}) + \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \ln(\sqrt{x}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

D'où $F(x) = x \ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$.

Exo standard

- $\sigma(n) = \sum_{\substack{d, d \mid n \\ 1 \leq d \leq n}} d$ Donner un équivalent qd $x \to \infty$ de

$F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \sigma_n = \sum_{\substack{1 \leq d, n \leq x \\ d \mid n}} d = \sum_{\substack{1 \leq d, d' \leq x \\ d.d' \leq x}} d = \sum_{d=1}^{E(x)} d \sum_{d'=1}^{E(x/d)} 1$

$= \sum_{d=1}^{E(x)} d . E(x/d)$

$\sum_{d=1}^{E(x)} d\left(\frac{x}{d} - 1\right) < F(x) \leq \sum_{d=1}^{E(x)} x$

$\underbrace{x E(x) - \frac{E(x)[E(x)+1]}{2}}_{\sim x^2/2} \leq F(x) \leq x E(x)$ → pas suffisant.

$\sim x^2$

$F(x) = (2) \sum_{\substack{1 \leq d \leq \sqrt{x} \\ d.d' \leq x}} d - \underbrace{\sum_{1 \leq d, d' \leq \sqrt{x}} d}$

= Toute la Σ avec le cas $d < \sqrt{x}$, sym avec le cas $d' < \sqrt{x}$, mais on compte 2 fois qd $d \& d' < \sqrt{x}$

$(= E(\sqrt{x}) \times \frac{E(\sqrt{x})(E(\sqrt{x})+1)}{2} \sim \frac{x\sqrt{x}}{2}$

→ On peut pas que les 2 sommes sont = car on somme les d et de l'autre les d'

$F(x) = \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq d \leq \sqrt{x} \\ d d' \leq x}} d}_{\sim ? x\sqrt{x}} + \sum_{\substack{1 \leq d' \leq \sqrt{x} \\ d d' \leq x}} d - \underbrace{\sum_{1 \leq d, d' \leq \sqrt{x}} 1}_{\sim \frac{x\sqrt{x}}{2}}$

→ on s'en branle

→ on s'en branle

$\sum_{d'=1}^{E(\sqrt{x})} \sum_{d=1}^{E(x/d')} d = \sum_{d'=1}^{E(\sqrt{x})} E(x/d')(E(x/d')+1)$

$\sim \frac{x^2}{2} \sum_{d'=1}^{E(\sqrt{x})} \frac{1}{d'^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{12} x^2} + o(x^2)$