

NOM : Peller-Mary

Prénom : Alice

Jury :

1/4

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : **229** Fonctions monotones. Fonctions convexes.

Autre sujet : Exemples et applications.

I) Fonctions monotones et convexes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1) Fonctions monotones:

Dans toute la suite, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et on s'intéressera dans cette partie I) à des fonctions $g: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Def 1: Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que g est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $x, y \in I$, $x < y$, on a $g(x) \leq g(y)$ (resp. $g(x) < g(y)$). g est décroissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x, y \in I$, $x < y$, on a $g(x) \geq g(y)$ (resp. $g(x) > g(y)$). g est (strictement) monotone si g est (strictement) croissante ou décroissante.

Ex 2: $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

1.1 $x \leq 0$: $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 3: Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors g est injective si g est strictement monotone.

Ex 4: $\tan$ est injective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Appl 5: Deux intervalles de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes si ils ont la même nature (bornés, ouverts, ou semi-ouverts).

2) Fonctions convexes:

Def 6: On dit que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], g(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)$. Si l'inégalité est stricte lorsque $a \neq b$, $\lambda \in]0, 1[$, on dit que g est strictement convexe.

Def 7: Si $-g$ est convexe, on dit que g est concave.

Ex 8: exp, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 3x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

$\log$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

$x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Ex 9: Graphiquement, g est convexe si son graphe est au dessus de toutes ses cordes (cf Annexes 1).

Prop 10: Si g est convexe, $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels ≥ 0 tq. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors $g(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 g(x_1) + \dots + \lambda_n g(x_n)$.

Prop 11: $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x_0 \in I$, $g'_x: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Corollaire 12: Si g convexe et $a < b < c \in I$, on a $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{g(c) - g(a)}{c - a} \leq \frac{g(c) - g(b)}{c - b}$ (cf Annexes 2).

Ex 13: Géométriquement: La pente des cordes est croissante.

Ex 14: Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et majorée, alors g est constante.

3) Régularité:

1) Fonctions monotones:

Prop 15: Si $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors $\forall x \in I$, g admet une limite à droite et à gauche en x .

Ex 16: $\mathbb{I} x \leq 0$ est discontinue en 0 mais $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

Prop 16: L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Corollaire 17: Une fonction monotone sur $[a, b]$ est continue uniforme de fonctions en croissant, et on peut définir son intégrale.

Prop 18: Soit $E \subset]a, b[$ un ensemble au plus dénombrable, on peut trouver g croissante sur $[a, b]$ discontinue en tout point de E et en des points seulement.

Ex 19: On peut trouver $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et discontinue en tout rationnel.

2) Fonctions convexes:

Prop 20: Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors $\forall x \in I$, g possède une dérivée à droite et à gauche en x .

Prop 48 : Si $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois différentiable alors g convexe $\Leftrightarrow \forall x \in U, D^2g$ est symétrique semi-définie positive (on note $D^2g \geq 0$).

App 49 : Si $A \geq 0, x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe. Applications en optimisation, cf partie III.

III) Applications :

1) Inégalités de convexité :

Prop 50 : Inégalité arithmético-géométrique. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+, \text{ alors } (x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

On a égalité ssi $x_1 = \dots = x_n$.

App 51 : Inégalité d'Hadamard. Soit $f \in \mathcal{H}_K(U)$, alors $|f(x)| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |m_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

On a égalité ssi : Les lignes sont orthogonales.

Prop 52 : Soient $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\forall x, y \geq 0, x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

App 53 : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un espace mesuré, f, g mesurables positives et $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note $\|f\|_p = (\int f^p)^{1/p}$

Hölder : $\int fg \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Minkowski : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Corollaire 54 : Si $1 \leq p \leq \infty, (L^p(X, \mu))$ est un espace vectoriel normé.

2) Étude de systèmes dynamiques :

Prop 55 : Soit $A \in \mathbb{R}$ et $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la suite $u_n \in A$ et $u_{n+1} = g(u_n) \ (n \in \mathbb{N})$.

- Si g est croissante, (u_n) est monotone.
- Si g est décroissante, (u_n) et (u_{2n}) sont monotones.

Ex 56 : $u_0 \in]0, 1[, u_{n+1} = \sin(u_n)$. La suite (u_n) est décroissante.

Prop 57 : Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 et croissante, et $\lambda_1 < \lambda_2$ deux pts fixes consécutifs de g . Alors la suite u_n définie par $u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[, u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers λ_1 ou λ_2 selon la position de la courbe de g et de la droite $y=x$ (cf Annexe 3).

Ex 58 : $u_0 \in]0, 1[, u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_n \rightarrow 1$
 $v_0 \in]0, 1[, v_{n+1} = v_n^2, v_n \rightarrow 0$.

3) Probabilités :

Def 59 : Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de X est $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], F(x) = P(X \leq x)$.

Prop 60 : F est croissante.

Def 61 : Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On définit $g^-(u) = \inf \{x: g(x) \geq u\}$ si $u \in g(\mathbb{R})$.

Prop 62 : Soit U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ et g croissante, continue à droite l.q. $g(x) \rightarrow 0$ et $g(x) \rightarrow 1$ à $-\infty$ et $+\infty$. Alors $g^-(U)$ est une variable aléatoire de fonction de répartition g (en particulier, g est une fonction de répartition).

Ex 63 : $g(x) = 0$ si $x \leq 1, \frac{x-1}{2}$ si $x \in [1, 3], 1$ si $x \geq 3$. $X = g^-(U)$ est une v.a. uniforme sur $[1, 3]$ (cf Annexe 4).

Prop 64 : A partir de U , on peut construire des v.a. réelles de n'importe quelles lois.

4) Minimisation de fonctions convexes :

Dans toute cette partie, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe et $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

Prop 65 : Si $x_0 \in U$ est un minimum local de g , alors g est un minimum global. De plus, si g est strictement convexe, $g(x_0) < g(x)$ $\forall x \neq x_0$.

Ex 66 : $(x-1)^2$ a un minimum en 1 (unique).

Prop 67 : Si g est différentiable et $a \in U$, a minimum local $\Leftrightarrow Dg(a) = 0$.

Prop 68 : Dans le cas où g n'est pas convexe, on a juste "a min local $\Rightarrow Dg(a) = 0$ ".

App 69 : Pour trouver le minimum de g , on se ramène à résoudre $Dg(a) = 0$. Avec une méthode itérative, par exemple la méthode de Newton.

Ex 70 : Soit $A \in \mathcal{H}_K(\mathbb{R}^n), A \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \ (x \in \mathbb{R}^n)$. J minimise $J \Leftrightarrow Ax = b$.

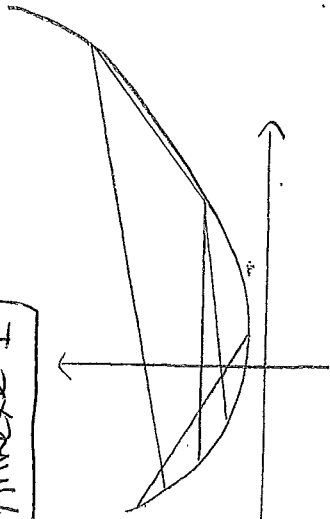
App 71 : Méthode des moindres carrés : Étant données $(x_i, y_i), i=1, \dots, m, (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, on veut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ qui minimisent $\sum_{i=1}^m |ax_i + b - y_i|^2$ (cf Annexe 5). On trouve a et b en résolvant un système de taille 2×2 .

Rem 72 : Une approche double consiste à résoudre un système linéaire $Ax = b$ en minimisant la fonctionnelle $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$. On obtient des différents algorithmes du gradient.

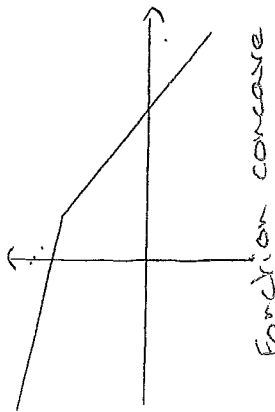
F croissante $\rightarrow$ variable aléatoire d'la loi de répartition et F (continue)

Dpt 1

Annexe 1

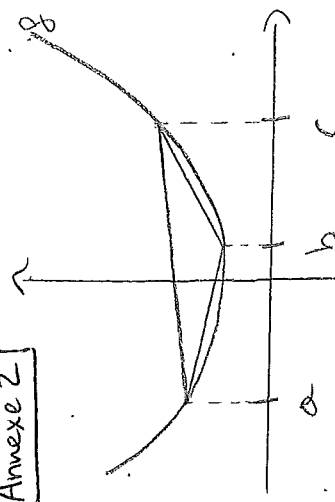


Fonction convexe



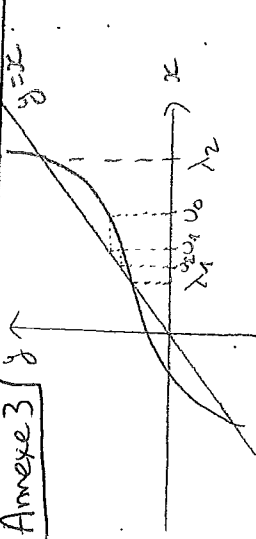
Fonction concave

Annexe 2

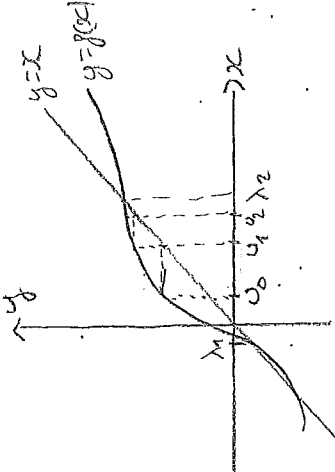


f convexe : la pente des cordons est croissante (Ann 12)

Annexe 3

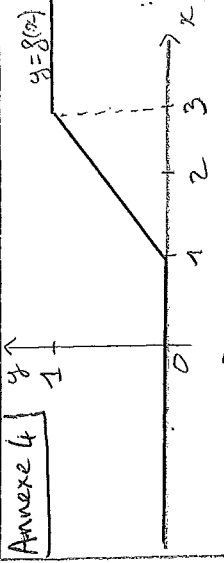


$u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$, $u_{n+1} = f(u_n)$
La suite (u_n) converge vers λ_1 .



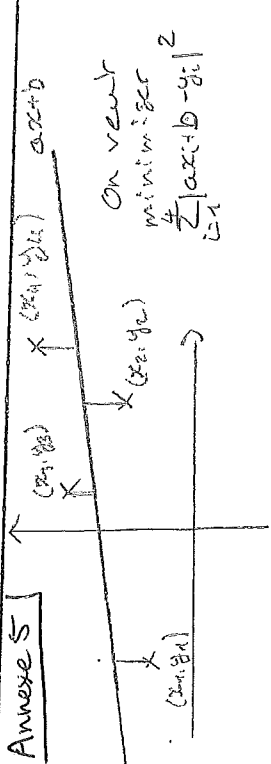
$u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite (u_n) converge vers λ_2 .

Annexe 4



$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
est une fonction de répartition

Annexe 5



peut rajouter : fonce $\rightarrow$ convexe si elle est majorée.

Références :

- Audin, principes d'analyse mathématique, J. Sels
- Gourdon, Analyse
- Pommerehne
- Beck-Altick-Peyre $\leftarrow$ Sets convexes sur $\mathbb{R}^n$
- Bourdin $\leftarrow$ pas mal d'idées
- Bourdieu $\leftarrow$ optimisation
- Ciarlet

Léçon 229 : Fonc^o monotones. Fonc^o axes. Exer & appli.

I. Défense de plan

Planes de fonc^o assez grandes, qu'on retrouve de bcp de domaines m par mal de résultats théoriques dessus.

Monotones : que de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ m convexe : peut être def de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\rightarrow$ II). Mais on se ramène int à des fonc^o $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pr les étudier.

II. Questions plan

- Généralisa^o de fonc^o monotones à $\mathbb{R}^n$?

$\hookrightarrow$ fonc^o restreinte selon un axe est monotone

III. Développement 2.

• Dém prop 17

Idee : on se ramène à une fonc^o de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On pose $g : t \mapsto f(x + t(y-x))$ pour $t \in [0, 1]$. f conv $\rightarrow g$ conv. f diff $\rightarrow g$ diff

$$g'(t) = Df(x + t(y-x)) \cdot (y-x).$$

$$g(1) = f(y) \geq g(0) + g'(0)(1-0)$$

$$\geq f(x) + Df(x) \cdot (y-x)$$

• Dém prop 67

$\Rightarrow$ admis.

$\Leftarrow$ $y \in U$. prop 17 $\rightarrow f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$
de a min global de f .

• Dém ex 7a

J P? Différention J: soient $x, h, k \in \mathbb{R}^n$

$$DJ(x) \cdot h = \frac{1}{2} (2 \langle Ax, h \rangle - \langle b, h \rangle) = \langle Ax - b, h \rangle$$

$$D^2 J(x) \cdot (h, k) = \langle Ak, h \rangle.$$

$D^2 J = A \in \text{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$ et J est conv

Prop 67 $\rightarrow \bar{x}$ min local de $J \Leftrightarrow DJ(\bar{x}) = 0$
 $\Leftrightarrow A\bar{x} = b$

• Méthode des moindres carrés (app 71)

On pose $W = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

On req que $Wv = (ax_i + b)_{i \in [n]}$

On note $(y_i)_{i \in [n]} = y$. On a alors que minimiser $\sum | - |^2$ revient à minimiser

$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(v \mapsto \sum \|Wv - y\|^2 = \|Wv - y\|_2^2$

Or $J(v) = \langle Wv - y, Wv - y \rangle$

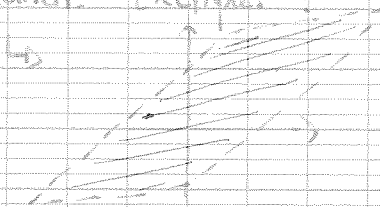
$= \langle Wv, Wv \rangle - 2 \langle Wv, y \rangle + \|y\|_2^2$

$= \langle {}^t W W v, v \rangle - 2 \langle {}^t W y, v \rangle + \|y\|_2^2$

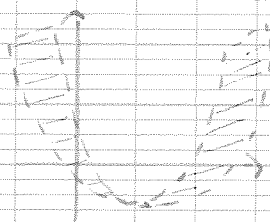
exto $\rightarrow v$ min de J si $\underbrace{{}^t W W v}_{\in \text{Vect}(W)}$ $= {}^t W y$

IV. Questions Traps chp 2

- Ex 20. Il y a des cas où $Ax = b$ a plusieurs ou n'a pas de solution. Exemples ?



(plan incliné)
pas de minimum



(feuille pliée en deux)
une dte de minimum

- Méthode des moindres carrés, plein d'applications en économie.
- Us d'autres appls de la minimisation de formes quadratiques (ex:)?
→ mécanique lagrangienne.

V Exercices

→ peut se mettre
dans le plan
(cf Henri)

1] Généralisation des fnc^s monotones : fnc^s complètement monotones
ie toutes les dérivées sont monotones. (ex: exp a toutes ses dérivées
positives, $\ln x$ en a une sur deux nég et une sur deux pos).

f est dite complètement monotone si $f, (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$
(+ positive)
i.e. stable par pdt (mu par par comp.)

$$-(fg)' = f'g - fg' = (-f')g + (g')f \geq 0$$

$$(-1)^n f^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{(k)} (-1)^{n-k} g^{(n-k)}$$

