(228)*

NOM : PHOMMADY Prénom : Kenny Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 228 - Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle - Exemples et contre-exemples (Exemples et applications dans le rapport du jury).

Autre sujet :

On désigne par I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application, et $x_0 \in I$. On considèrera ici des intégrales de Lebesgue.

I Régularité d'une application

1 Continuité

Définition 1 : f est continue en x_0 si f a une limite en x_0 et $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

On définit de même la continuité à gauche et à droite avec des limites à gauche et à droite.

Propriété 2 : f est continue en x_0 ssi f est continue à gauche et à droite en x_0 et $\lim_{x \to x_0 ; x < x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 ; x > x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple 3 : $x \mapsto E(x)$ n'est pas cont. en $x_0 \in \mathbb{Z}$

Propriété 4 : f est cont. en x_0 ssi $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$ pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$.

On a le même type de propriétés pour la cont. à gauche et à droite (on restreint à $u_n \nearrow$ et $u_n \searrow$)

Exemple 5 : $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Application 6 : Une fonction monotone n'admet qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Définition 7 : f est cont. sur I ~~si~~ f est cont. en tout $x_0 \in I$. On note $C^0(I, \mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Propriété 8 : Si f, g sont cont. sur I, $f+g$, fg, $f \circ g$, f/g sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 9 : Une fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Théorème 10 (Valeurs intermédiaires) (TVI) Soit f cont. sur un segment. Alors l'image de f est un segment. Plus généralement, si f cont. sur I, $f(I)$ est un intervalle.

Conséquence 11 : Si $f : I \to J$ cont. bij., alors f^{-1} cont.

Application 12 : Un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

2 Uniforme continuité

Définition 13 : f est uniformément continue (uc) sur I si : $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Propriété 14 : Si f uc sur I, alors f cont. sur I.

Théorème 15 (Heine) : Si I est un segment, la réciproque de la propriété 14 est vraie (faux sinon, prendre $x \mapsto x^2$)

Application 16 (Approximation par sommes de Riemann)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. On a : $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$

Application 17 (Weierstrass) : L'ensemble des polynômes à valeurs dans $[a,b]$ est dense dans $C^0([a,b], \mathbb{R})$ pour $\| \ \|_\infty$.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi :

Autre sujet :

dév 1

Théorème 18 (Prolongement des fonctions uc)
Soit $a<b\in\mathbb{R}$, $f :]a,b[\to\mathbb{R}$ uc. Il existe une unique $g\in C^0([a,b],\mathbb{R})$ tq $g|_{]a,b[}=f$.

③ Fonctions lipschitziennes.

Définition 19 : f est lipschitzienne (lip) ssi : $\exists k\geq 0\ \forall x,y\in I\ |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$.

Propriété 20 : Une fonction lip. est uc.

Exemple 21 : $x\in\mathbb{R}^+\mapsto x^p$, pour $p\geq 0$, est lip. ssi $p\in\{0,1\}$, et est uc ssi $p\leq 1$.

Proposition 22 : L'ens. des fonctions lip est dense dans l'ens. des fonctions uc (pour $\|\ \|_\infty$)
(l'exemple 21 et la proposition 22 seront montrés plus tard)

④ Dérivabilité

Définition 23 : • f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite en x_0. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ la limite.

• f est dérivable sur I si f est dérivable en tout x_0 de I. On note $f' : x\in I\mapsto f'(x)$.

• On note $D^1(I,\mathbb{R})$ l'ens. des fonctions dérivables (dér.) sur I.

Proposition 24 : f est dérivable en x_0 ssi il existe $\eta : I\to\mathbb{R}$ avec $\eta(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ telle que : $\forall x\in I,\ f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\eta(x)(x-x_0)$
En particulier, le graphe de $t\mapsto f(x_0)+f'(x_0)(t-x_0)$ est la tangente en x_0 du graphe de f.

Proposition 25 : Si $f,g\in D^1(I,\mathbb{R})$, $f+g$, fg, f/g, $f\circ g$ sont dér. sur leur domaine de définition, et : $(f+g)'=f'+g'$; $(fg)'=f'g+fg'$; $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$;
$(f\circ g)'=(f'\circ g)\times g'$.

Exercice 26 : Trouver les fonctions f,g,φ cont. sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x\neq y,\quad \frac{f(x)-g(y)}{x-y}=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Propriété 26 : $D^1(I,\mathbb{R})\subset C^0(I,\mathbb{R})$

Exemple 27 : La réciproque est fausse (par exemple $x\in\mathbb{R}\mapsto|x|$). Il existe même des fonctions cont. sur $\mathbb{R}$ dér. en aucun point de $\mathbb{R}$. Par exemple
$$x\in\mathbb{R}\mapsto\sum_{n\geq 0}b^{-an}\cos(b^n x),\ a\in]0,1[,\ b>1.$$

Théorème 28 (Darboux) : Soit $f\in D^1(I,\mathbb{R})$, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Exemples 29 : • $x\in\mathbb{R}\mapsto E(x)$ n'est pas une dérivée.
• si $f : x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}x^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$, $f'([0,1])=\mathbb{R}$.

Proposition 30 : Soit $a\in I$, f dérivable en a. Si f a un extremum local en a, alors $f'(a)=0$. La réciproque est fausse (par exemple $x\mapsto x^3$)

Corollaire 31 : (Rolle)
Soient $a<b\in\mathbb{R}$, $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})\cap D^1(]a,b[,\mathbb{R})$ tq $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tq $f'(c)=0$.

Corollaire 32 : (Accroissements finis)
Soit $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})\cap D^1(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tq $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Conséquence 33 : Soit $f\in D^1(I,\mathbb{R})$, f est croissante (resp. décroissante) ssi $f'\geq 0$ (resp. $f'\leq 0$).

(228) *

NOM : **Prénom :** **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi :

Autre sujet :

II Dérivées multiples et développements limités

① Espaces D^k et C^k

Définition 34 : On définit par récurrence :
- toute fonction est 0-fois dérivable, on note $f^{(0)} = f$.
- pour $k \geq 1$, f est k fois dérivable si f est $k-1$ fois dérivable et $f^{(k-1)}$ est dérivable, on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.
- On note $D^k(I,\mathbb{R})$ l'ens. des fonctions k fois dér sur I, $C^k(I,\mathbb{R})$ l'ens. des fonctions $\in D^k(I,\mathbb{R})$ tq $f^{(k)} \in C^0(I,\mathbb{R})$; on note $C^\infty(I,\mathbb{R}) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(I,\mathbb{R})$.

Proposition 35 : Soit $f \in C^0(I,\mathbb{R})$, C^1 sur $I\setminus\{a\}$. Si f' a une limite l en a, alors $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, et $f'(a) = l$.

Théorème 36 : Si $f \in C^0(I,\mathbb{R})$, alors $F : x \in I \mapsto \int_{x_0}^{x} f d\lambda$ est C^1 sur I, et $F' = f$.

Conséquence 37 : pour tout $k \geq 0$, $C^{k+1}(I,\mathbb{R}) \subsetneq D^{k+1}(I,\mathbb{R}) \subsetneq C^k(I,\mathbb{R})$

Exemple 38 : $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dér. mais pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

dév 2

Remarque 39 : Il n'existe pas de fonctions D^k qui soit C^k nulle part. En fait, si $f \in D^1(I,\mathbb{R})$, l'ens. des points de cont. de f' est dense dans I.

② Développement limité

Théorème 40 : (Taylor avec reste intégral). Soit $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{R})$, alors pour tout x de I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

en particulier, $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O((x-x_0)^{k+1})$

Remarque 41 : On peut additionner, multiplier, composer et diviser des développements limités.

Exemple 42 : Calculer $\lim_{x\to 0} (\arctan x)^{1/x^2}$

III Opération sur les fonctions cont. / dér.

① Suites et séries de fonctions

Théorème 43 :
- Si $(f_n) \in C^0(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément (cvu) vers f, alors $f \in C^0(I,\mathbb{R})$.
- Si $(f_n) \in C^1(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge simplement (cvs) en un point, et tq f_n' cvu vers g, alors f_n cvu vers $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, et $f' = g$.

En particulier, si $(f_n) \in C^1(I,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est tq $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvs en un point, et tq $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvu, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvu et $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'$.

Exemple 44 : exp, cos, sin, ch, sh sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

② Intégrales à paramètre

Théorème 45 :
- Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $t_0 \in I$ tq :

  * $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable

  * $\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est intégrable.

  * pour presque tout x, $t \mapsto f(t,x)$ est cont. en t_0.

  Alors $F : t \in I \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx$ est définie et cont en t_0

- Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

  * $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable

  * $\exists t_0 \in I$, $x \mapsto f(t_0,x)$ est intégrable

  * $\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(\mathbb{R}\setminus A) = 0$ et $\forall x \in A$, $t \in I \mapsto f(t,x)$ est dér sur I

  * $\forall x \in A$, $t \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est intégrable

  Alors pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable, $F : t \in I \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx$ est dér., et $F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathbb{1}_A(x)\,dx$

Exemple 46 : Soit $\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ C^\infty$ tq $\forall k, l \geq 0\ |t^k f^{(l)}(t)| \underset{|t|\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Alors $f \in \mathcal{S} \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \left(\xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx\right) \in \mathcal{S}$ est bijective.

Coca Danthony

3/3

$\boxed{\text{Questions}}$ (1)

→ Sur le ctrl

- construire une fonc° dt la dérivée va être continue sr $\mathbb{Q}$
  ↳ n'existe pas
  est-ce que $\mathbb{Q}$ peut s'écrire c une $\cap$ d'ouverts denses
  ↳ non.
  pq[uoi] ?

→ Sur le plan

- déf 1 f a une limite en $x_0 \triangleq$?
  $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$
- A quoi sert le prolongement des fonc° UC (thm 18) ?
  ↳ a déf des fonc° sr des espaces bcp + gros que ce qu'on pouvait faire directement.
  Plgmt sr un segment ouvert. Cadre plus général ?
  ↳ quand c'est dense
- exple 27 (ctrl 1). Pas dér. Est ce que lipsch ?
  ↳ thm + gnal : g périodique + lipsch $\Rightarrow x \mapsto \sum b^{-an} g(b^n x)$ → c'est dériv nulle part. ↘ lipsch
  alternative, a priori non
- shéma des inclusions sr un segment et plus sr $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \text{cont} = \text{UC} & \not\supseteq & \text{lip} \\ \cup\!\!| & & \\ \text{dér} & & \\ \cup\!\!| & & \\ \mathcal{C}^1 & & \end{array}$$

dense

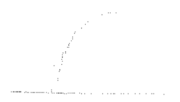
sr $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{ccccc} \text{cont} & \supsetneq & \text{UC} & \not\supseteq & \text{lip} \\ \cup\!\!| & & & & \\ \text{dér} & & & & \\ \cup\!\!| & & & & \\ \mathcal{C}^1 & & & & \end{array}$$

- f UC
  $g_n(x) = \left(\int_x^{x+1/n} f \, d\lambda \right)_n$
  ↗ et $\in \mathcal{C}^1$ donc
  $\mathcal{C}^1$ dense ds UC = $\mathcal{C}^0$
  $\Rightarrow \mathcal{C}^1$ dense ds lip.

Une fonc° lip :

en tt pt on peut mettre un cone qui n'∩ le graphe

fonc° $\sqrt{\ }$:



mais on ne peut pas placer de cones au début

$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$
$|\sqrt{x}| \leq k|x| \Rightarrow k\sqrt{x} \geq 1$
↗ $x \neq 0$

Questions (2)

- Rq 41. Qu'est-ce que ça veut dire composer les dl ?

- prop 25 f et g der $\Rightarrow f\circ g$ der

↳ $$\frac{f\circ g(x+h) - f\circ g(x)}{h} = \frac{f(\overbrace{g(x)}^{z} + \overbrace{hg'(x) + o(h)}^{\varepsilon}) - f\circ g(x)}{h}$$

$$f(z+\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \ldots = \frac{f\circ g(x) + hg'(x) f'(g(x)) + o(h) f'(g(x)) + o(h) - f(g(x))}{h}$$

$$= f'(g(x))\, g'(x) + o(1)$$

Rq. Pas nécessaire de passer par les dl. Ms manière la + élégante.

- thm 36 f $C^1 \Rightarrow \int_0^x f' = f$ à une cste près

Si on suppose à la place f dérivable pp et dérivée intégrable ?

↳ $f = \mathbb{1}_{[0,a]}$: ne va pas marcher

mais là f pas C^0. Et si f est C^0 ?

- f tq $\{\}$ des pts où f est dériv $= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? / accumula° de pts de non-dériv

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

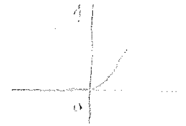
$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^n}, +\infty[}$$

$\mathbb{Q}$ $\sum \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_{[a_n, +\infty[}$

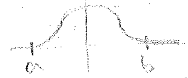
$\mathbb{Q} - \{a_n\}$

Exercice

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Mq f est $\mathcal{C}^1$



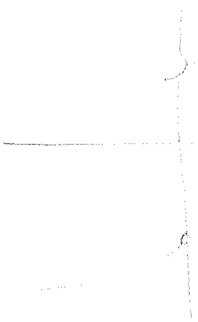
$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$



$e^{\frac{-1}{(x-a)(x-b)}}$

ie mq f' continue

f conv $\Rightarrow f' \nearrow$



f' vérifie le TVI

$f'(x_+) - f'(x_-)$

vrai ds $\mathbb{R}$, pas ds $\mathbb{R}^n$!

← Union de 2 boules = boule non disj.

→ F fermé. mq $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ $F = f^{-1}(\{0\})$

f tq $f_{|F} = 0$ $f_{|F^c} \neq 0$. f cont : $f(x) = d(x, F)$

f $\mathcal{C}^1$

On construit par f sur F ou sur son compl $=$ ouvert : union dénomb. d'ouv disjoints

$O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ ← disjoints !!

$u_i(x) = 0$ si $x \notin I_i$
> 0 sinon
u_i et $u_i' \in [0,1]$

$\mathcal{C}^1$

$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} u_n(x)$

Mq f est $\mathcal{C}^1$

* cvs en 1 pt
* $\sum \frac{1}{n^2} u_n'(x)$ cvu car cvn

$\mathcal{C}^\infty$? Rq on ne peut pas exiger que les dériv. ds $[0,1]$

On veut, $\forall k, \exists M_k, \forall n, \|u_n^{(k)}\| \leq M_k$

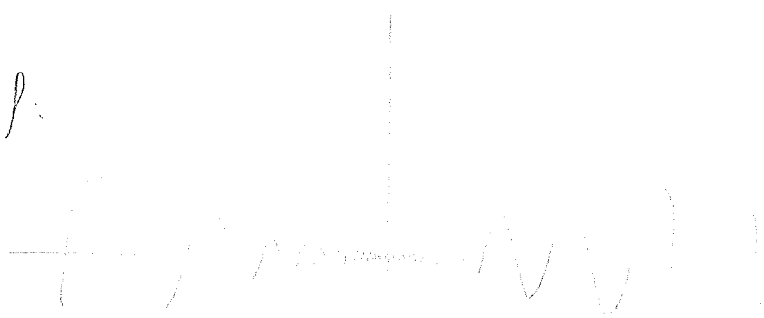
→ écrire la $\sum$ $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 (\sup_{k \leq n} M_k)} u_n(x)$

fonc° dériv non $\mathcal{C}^1$?

$2x \sin(1/x)$

$- x^2 \times \frac{1}{x^2} \cos(1/x)$

f :



$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

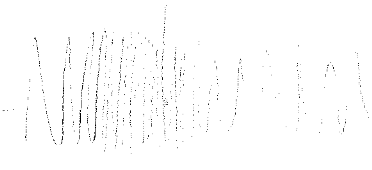
$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(1/x) \to 0$

→ dériv en 0

→ $f'(x) = \begin{cases} -\cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

non continue

f' :



Rqs

- dvlt 2 : m + qu'un Ω dense : un G_δ - dense ?
- dl : plutôt Taylor-Young que Taylor reste ∫
- il faut parler des suites & séries de fonc°
- dessin (⊂ inclusions) pour la défense du plan : ☺

→ sur les Q

- un fonc° lip est dérivable pp. (à garder ds un coin de la ∫)
  (-exple d'une fonc° C^0 ≠ ∫ de sa dérivée = escalier de Kantor
  vers fonc° absolument c° ⊂ lip. = ∫ dérivée + deriv pp
- sr le schéma : ⚠ aux no° locales et globales ?
  ↳ se placer sr un segment : chgt.

→ plan

- exo 26 plutôt mettre de exo ac réponse.
  ↳ réponse : f, g . f - g poly de deg ≤ 2. f = f'
- parler de fonc° cvxes c'est bien

→ autres

- fonc° croissante = ∫ c° sf sr un Ω dénomb
  dér pp

Développement 1

Soit $a \in]0,1]$, $b \in]1,+\infty[$. Il s'agit de montrer que $x \in \mathbb{R} \overset{W}{\longmapsto} \sum_{n \geq 0} b^{-an} \cos(b^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part sur $\mathbb{R}$.

① La série de terme général $x \in \mathbb{R} \overset{f_n}{\longmapsto} b^{-an} \cos(b^n x)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme f_n est continue pour tout $n \geq 0$, W est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème 43.

② Il s'agit donc de montrer que W n'est dérivable nulle part sur $\mathbb{R}$.

ⓐ On montre l'existence de $\Psi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{F}\Psi_b$ (qui existe) vérifie :

$* \ \mathcal{F}\Psi_b|_{]1/b, b[} > 0$; $\mathcal{F}\Psi_b|_{]\frac{1}{b}, b[^c} \equiv 0$.

ⓑ On introduit pour tout $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $c(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} W(x + \alpha z) \Psi_b(z)\, dz$, et on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- si W est dérivable en x, alors $c(\alpha, x) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$
- $c(\alpha, x) \underset{\alpha \to 0}{\not\longrightarrow} 0$

ⓐ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$. On vérifie que g est C^∞ grâce à la proposition 35 (notamment en 0).

On définit alors $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_b(x) = g(x - \frac{1}{b}) g(b - x)$.
g_b est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie les hypothèses demandées par $\mathcal{F}\Psi_b$.
En particulier, g_b est à support compact donc pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $|x^k g_b^{(\ell)}(x)| \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$
Autrement dit, par l'exemple 46, $g_b \in \mathcal{S}$, et donc il existe $\Psi_b \in \mathcal{S}$ telle que $\mathcal{F}\Psi_b = g_b$

En particulier :

(i) Ψ_b est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ii) $x \mapsto x \Psi_b(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \Psi_b \, d\lambda = 0 \ (= \mathcal{F}\Psi_b(0))$ (iv) $\int_{\mathbb{R}} x \Psi_b(x)\, dx = 0 \ (= i(\mathcal{F}\Psi_b)'(0))$

(v) $\mathcal{F}\Psi_b|_{]\frac{1}{b}, b[^c} \equiv 0$ (vi) $\mathcal{F}\Psi_b(1) > 0$.

ⓑ Si W est dérivable en x, alors d'après la proposition 24, il existe $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout h de $\mathbb{R}$,

$$W(x+h) = W(x) + hW'(x) + h\eta(h) \quad \text{avec } \eta(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

On remarque que $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \begin{cases} \frac{W(x+h) - W(x)}{h} - W'(x) \\ 0 \text{ si } h = 0 \end{cases}$ et donc η est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ car W l'est.

D'où pour tout $\alpha > 0$, $c(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}} W(x) \Psi_b(z) dz + \int_{\mathbb{R}} \alpha z W'(x) \Psi_b(z) dz + \int_{\mathbb{R}} \alpha z \eta(\alpha z) \Psi_b(z) \right.$

par (iii) et (iv), $c(\alpha, x) = \int z \eta(\alpha z) \Psi_b(z) dz$.

On veut utiliser le théorème de convergence dominée (en continu).

* Pour tout $\alpha>0$, $z \overset{\varphi_\alpha}{\mapsto} z\,\eta(\alpha z)\Psi_b(z)$ est mesurable et φ_α <u>cvs</u> vers 0.

* Pour tout $\alpha>0$, $z\in\mathbb{R}$, $|z\eta(\alpha z)\Psi_b(z)| \leq |z\Psi_b(z)|$ intégrable (par (ii))

<u>donc</u> $c(\alpha,x)\xrightarrow[\alpha\to0]{}0$.

■ On calcule $c(\alpha,x)$:

$$c(\alpha,x)=\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n\geq0}b^{-an}\cos(b^n(x+\alpha z))\Big)\Psi_b(z)dz.$$

On veut intervertir série et intégrale :

* $z\mapsto b^{-an}\cos(b^n(x+\alpha z))\Psi_b(z)$ est intégrable pour tout $n\geq0$.

* $\left|\int_{\mathbb{R}}b^{-an}\cos(b^n(x+\alpha z))\Psi_b(z)dz\right|\leq b^{-an}\int_{\mathbb{R}}|\Psi_b(z)|dz$ $\left(\int_{\mathbb{R}}|\Psi_b(z)|dz<+\infty \text{ par (i)}\right)$

terme général d'une série convergente.

Donc on intervertit, et : $c(\alpha,x)=\sum_{n\geq0}\int_{\mathbb{R}}b^{-an}\cos(b^n(x+\alpha z))\Psi_b(z)dz$

$$c(\alpha,x)=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n\geq0}b^{-an}\left(e^{ib^nx}\int_{\mathbb{R}}e^{ib^n\alpha z}\Psi_b(z)dz+e^{-ib^nx}\int_{\mathbb{R}}e^{-ib^n\alpha z}\Psi_b(z)dz\right)$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n\geq0}b^{-an}\left(e^{ib^nx}\mathcal{F}\Psi_b(-b^n\alpha)+e^{-ib^nx}\mathcal{F}\Psi_b(b^n\alpha)\right).$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\sum_{n\geq0}b^{-an}e^{-ib^nx}\mathcal{F}\Psi_b(b^n\alpha)\quad\text{par (v).}$$

En particulier, pour tout $k\geq0$,

$$c(b^{-k},x)=\frac{b^k}{2}\sum_{n\geq0}b^{-an}e^{-ib^nx}\mathcal{F}\Psi_b(b^{n-k})$$

$$=\frac{b^k}{2}b^{-ak}e^{-ib^kx}\mathcal{F}\Psi_b(1)\quad\text{par (v).}$$

<u>Ainsi</u> $|c(b^{-k},x)|\geq\frac{1}{2}\mathcal{F}\Psi_b(1)>0$ par (vi)

Comme $b^{-k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, on en déduit $c(\alpha,x)\underset{\alpha\to0}{\not\to}0$.

D'où W n'est pas dérivable en x pour tout x de $\mathbb{R}$, et donc W n'est nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>Référence</u> : pas dans un livre, inspiré du sujet de concours ENS Mathématiques MPI 2 de 2007

Développement 2

Il s'agit de montrer qu'une fonction dérivable sur I ne peut pas avoir sa dérivée continue nulle part sur I.

① Théorème de la limite simple de Baire :

Soit $(f_n) \in C^0(I,\mathbb{R})$ qui cvs vers f. Alors f est continue sur un ensemble dense dans I.

② « On construit une suite g_n qui converge simplement vers f'. »

---

① On définit pour tous $n \geq 0$, $k \geq 1$:

$F_{n,k} = \{x \in I \mid \forall p,q \geq n\ |f_p - f_q|(x) \leq \frac{1}{k}\}$; $I_{n,k} = \mathring{F}_{n,k}$; $O_k = \bigcup_{n\geq 0} I_{n,k}$; $O = \bigcap_{k \geq 0} O_k$.

Il s'agit de montrer que :

ⓐ O est dense dans I.

ⓑ f est continue sur O.

$\forall i \in \mathbb{N}$, O_i ouvert dense $\Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$ dense
$\Updownarrow$
$\forall i \in \mathbb{N}$, F_i fermé, $\mathring{F}_i = \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i}} = \emptyset$.

ⓐ Montrons que pour tout k, O_k est dense dans I.

Pour cela, soit J un intervalle ouvert non vide de I, montrons que $O_k \cap J \neq \emptyset$. Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{cvs} f$, on a : $\forall x \in \overline{J}, \exists n \geq 0\ \forall p,q \geq n\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}$, ceci car $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy. Autrement dit, $\bigcup_{n\geq 0}(F_{n,k} \cap \overline{J}) = \overline{J}$. Comme $\overline{J}$ est d'intérieur J non vide, et $F_{n,k} = \bigcap_{p,q\geq n} |f_p - f_q|^{-1}([0;\frac{1}{k}])$ est fermé, par théorème de Baire, il existe $n \geq 0$ tel que $F_{n,k} \cap \overline{J}$ est d'intérieur $I_{n,k} \cap J$ non vide. Ainsi $O_k \cap J = \bigcup_{n \geq 0}(I_{n,k} \cap J)$ est non vide.

Comme pour tous $n \geq 0$, $k \geq 1$, $I_{n,k}$ est ouvert, O_k est ouvert, et dense dans I, donc $O = \bigcap_{k \geq 0} O_k$ est dense dans I par le théorème de Baire.

ⓑ Soit $x \in O$, $k \geq 1$. Par définition, $x \in O_k$ donc il existe $n \geq 0$ tel que $x \in I_{n,k} \subset F_{n,k}$. Pour tout $y_0 \in I_{n,k}$ (et donc en particulier pour x),

$\forall p,q \geq n\ |f_p(y_0) - f_q(y_0)| \leq \frac{1}{k}$, d'où en prenant $q = n$, et p tendant vers $+\infty$:

$|f(y_0) - f_n(y_0)| \leq \frac{1}{n}$

Comme f_n est continue, il existe un voisinage ouvert de x, qu'on appelle V, tel que : $\forall y_1 \in V\ |f_n(x) - f_n(y_1)| \leq \frac{1}{k}$.

Ainsi pour tout $y \in V \cap I_{n,k}$ (où $V \cap I_{n,k}$ est un voisinage de x, en particulier contient un intervalle centré autour de x), on a :

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{3}{k}$.

Ceci étant vrai pour tout $k \geq 1$, f est continue en x, et donc sur O.

② Soit $a = \inf I$; $b = \sup I$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère $I_\varepsilon =]a, b-\varepsilon[$, (228) *
et $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on définit $g_{n,\varepsilon} \in C^0(I_\varepsilon, \mathbb{R})$ par :
$\forall x \in I_\varepsilon, g_{n,\varepsilon}(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ (qui est bien défini).
On applique le théorème de la limite simple de Baire à $g_{n,\varepsilon}$, donc sa limite, qui par la définition de la dérivée, est $f'|_{I_\varepsilon}$, a un ensemble dense de continuité A_ε.

Alors $f'|_{]a,b[}$ a un ensemble dense de continuité, en l'occurrence $A = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$, qui est dense dans I, donc f' est continue sur A dense dans I.

<u>Référence</u> : inspiré de l'exercice 2 p399 dans le Gourdon, Analyse.

(228)

Références :

- FGN. Analyse 1

notamment ↳ p226 pour une réciproque de l'application 6.

↳ p254 pour une démonstration du théorème de Darboux (28)

Analyse 2

↳ p125 pour une démonstration du théorème de Weierstrass avec les polynômes de Bernstein.

- Gourdon, Analyse

→ chapitre 2, ① et ②.

→ chapitre 4, ③.

- L'exercice 26 provient de : Problèmes d'analyse II - Continuité et dérivabilité ; Kaczor, Nowak