

NOM : DURAND

Prénom : Romain

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 226: Suites Vectorielles et réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Autre sujet : Exemples et applications.

Ref: Gourdon Normis (Chaines de Markov)
Cianlet (Analyse numérique)

<u>Rq 9:</u> L'ensemble des suites vérifiant cette récurrence est un espace vectoriel de dimension p. <u>Prop 10:</u> En notant $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} + \dots - a_0$ et $x_1, \dots, x_p$ les racines de P avec multiplicité respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant cette relation de récurrence est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n)x_1^n + \dots + P_p(n)x_p^n \text{ où } P_i \in \mathbb{R}_{\alpha_i-1}[X]$ <u>Ex 11: (Ordre 2)</u> Si $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ pour $n \geq 2$, alors - Si $X^2 - aX - b$ a 2 racines $x_1 \neq x_2$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ - Si $X^2 - aX - b$ a une racine double x, $u_n = (\lambda + \mu n)x^n$ - Si $X^2 - aX - b$ a 2 racines complexes conjuguées ρ et ρ^* et $\rho^n = e^{i\theta}$, $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$ ou $u_n = \rho^n \sin(n\theta)$ <u>Ex 12 (Fibonacci):</u> $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$: $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ <u>Ex 13:</u> Si $u_{n+2} = \lambda \sqrt{u_n u_n}$ pour $\lambda > 0$, en posant $v_n = \log u_n$, on se ramène au cas précédent.	<u>II) Convergence de la suite et points fixes</u> <u>Prop 14:</u> Une suite monotone et bornée converge. <u>Prop 15:</u> Si I est un intervalle stable par f et $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors si f est croissante, (u_n) est monotone, et si f est décroissante, alors (u_n) et (u_{2n}) sont monotones de sens de monotonie opposés.
<u>II) Suites $u_{n+1} = f(u_n)$: calculs directs</u> <u>Prop 1:</u> Si $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout n avec $a \in \mathbb{R}$ alors $u_n = u_0 + na$ (Suites arithmétiques) <u>Prop 2:</u> (Suites géométriques). Soit $u_0 \neq 0$ et $u_{n+1} = qu_n$ pour tout n, avec $q \in \mathbb{R}$. Alors $u_n = q^n u_0$. <u>Rq 3:</u> (Suite arithmético-géométrique) Si $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout n, avec $a \neq 1$, on peut se ramener au cas géométrique en étudiant $v_n := \frac{u_n + \frac{b}{a-1}}{a-1}$ qui vérifie $v_{n+1} = av_n$. <u>Ex 4:</u> Si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$, en posant $v_n = u_n + 1$ on a $v_0 = 2$ puis $v_{n+1} = 2v_n$, donc $u_n = 2^{n+1} - 1$ <u>Prop 5:</u> (Cas linéaire dans $\mathbb{R}^n$) Si $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $u_{n+1} = Au_n$ pour tout n, alors $u_n = A^n u_0$ <u>Ex 6:</u> (Système "Poisson-parasite"). $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n + \beta y_n \\ y_{n+1} = \alpha y_n \end{cases}$ tant que x_n est positif. <u>Rq 7:</u> De même que dans le cas scalaire, on peut résoudre $u_{n+1} = Au_n + b$ si $(A - Id)$ est inversible en se ramenant au cas linéaire. <u>Def 8:</u> On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre p si $u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n$ pour $n \geq 0$ pour $a_0, \dots, a_{p-1}$ donnés	→ Rq: revenir à une suite récurrente vectorielle $u_{n+1} = f(u_n)$ car $u_n = (u_n)$

Rq fondamentale 16: Si f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ ne peut converger que vers un point fixe de C_u .

Ex 17: $u_{n+1} = \sin u_n$ (voir annexe)

Def 18: On dit qu'un point fixe de f est:

$\bullet$ attractif si il existe un voisinage de ce point tel que $u_N \Rightarrow u_n \rightarrow a$

$\bullet$ répulsif si $C_u \rightarrow a \Rightarrow (u_n) \rightarrow a$ stationnaire à partir d'un certain rang

Thm 19: (Point fixe de Picard). Si E est complet et f est contractant, ie

K -lipschitzienne pour $K < 1$, alors il existe un unique point fixe a de

f et toute suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe de façon géométrique

Cor 20: Si x est un point fixe de f et $|f'(x)| < 1$, alors x est attractif.

Appl 21: (Méthode de Newton). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f'(a)f'(b) < 0$.

$\bullet$ Si f ne s'annule pas sur $[a, b]$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge quadratiquement vers l'unique zéro de f .

$\bullet$ Si $f(x) = f'(x) = 0$ et $f''(x) \neq 0$, alors la méthode fonctionne encore et la convergence est géométrique.

III) Exemples de domaines d'utilisation

1) Résolution numérique de $Ax = b$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Rq 22: Si $Au = b \Leftrightarrow u = Bu + c$ avec $(I - B)$ inversible on peut définir une méthode itérative $u_{n+1} = Bu_n + c$ qui, si elle converge, tend vers la solution voulue.

Prop 23: La méthode converge $\Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow \|B\| < 1$ pour une norme induite.

Thm 24: (Le rayon spectral est la vitesse de convergence asymptotique)

$\bullet$ Si $u_{n+1} = Bu_n + c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|u_0\|=1} \|u_n - u\| = \rho(B)$

$\bullet$ si $\rho(B) < \rho(B')$ et $u_0 = u_0'$, alors $\forall \epsilon > 0$, il est tel $\sup_{\|u_0 - u\| = 1} \frac{\|u_n - u\|}{\|u_0 - u\|} \geq \frac{\rho(B')}{\rho(B) + \epsilon}$

Rq 25: Si $A = M^{-1}N$, M inversible et de forme simple, ie $B = M^{-1}N = I - M^{-1}A \in GL_n(\mathbb{R})$

$Au = b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b$

Def 26: (Méthode de Jacobi): On écrit $A = \begin{pmatrix} D & -F \end{pmatrix} = D - (E + F)$. Si

$a_{ii} \neq 0$ ti, on a $u_{k+1} = D^{-1}(E + F)u_k + D^{-1}b$.

Def 27: (Gauss-Seidel) En regardant les calculs de la méthode de Jacobi, on pense pouvoir accélérer la convergence en neutralisant les termes déjà

calculés: $u_{k+1} = Eu_k + Fu_k + b \Rightarrow u_{k+1} = (D - E)^{-1}F u_k + (D - E)^{-1}b$

Def 28 (Méthode de relaxation): On s'achève, en changeant légèrement l'appoint de la diagonale, améliorer la vitesse de convergence:

$A = \begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} D & -F \end{pmatrix} \Rightarrow Bu = \begin{pmatrix} D & -E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D & -F \end{pmatrix} u + F u$

Rq 29: Pour $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

2) Chaines de Markov

Cadre: E fini ou dénombrable.

Def 30 (Matrice Stochastique): $P = (p_{ij})$, $i, j \in E$ est stochastique si toutes ses lignes sont des mesures de proba, i.e. $p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Ex 31: $\alpha, \beta \in [0, 1]$. $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ 

Def 32: $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaine de Markov associée à P et de loi initiale λ si: i) $X_0 \sim \lambda$

ii) $P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_n, i_{n+1}}$ dès que ça a un sens.

Prop 33: Si E est fini de cardinal m , $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et en notant les mesures sur E comme des vecteurs lignes, on a, en notant j_n la loi au temps n , $j_{n+1} = j_n P$.

Def 34: Une mesure invariante est une mesure de proba telle que

$$\mu = \mu P.$$

Ex 35: $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ a pour unique mesure invariante $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$.

Prop 36: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$ n'a pas qu'une seule proba invariante. (chaîne réductible)

Processus de Branchement / de Galton-Watson

Soit $E = \mathbb{N}$ et p une mesure sur $\mathbb{N}$ telle que $p(1) \neq 1$ et $p(0) \neq 0$.

On se donne $(Z_i)_{i \geq 0}$ iid de loi p ("nombre de descendants du i -ième individu de la génération i s'il existe").

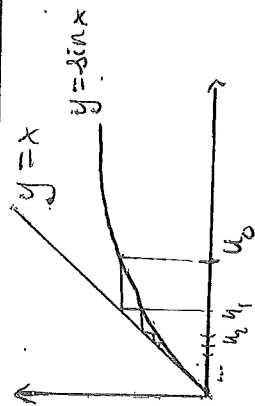
On pose $X_0 = 1$ et $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_i = \sum_{i=1}^{X_n} 1_{Z_i \geq 1}$.

On définit la proba d'extinction par $P(E_n, X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$.

Thm 37: Si $p \in L^1$ et $m = E[p]$, alors il y a extinction presque sûre si $m \leq 1$.

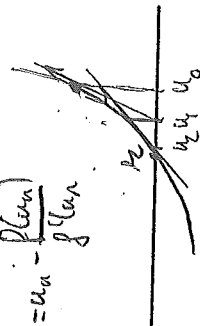
Annexe:

$$u_{n+1} = \sin u_n$$



Méthode de Newton

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$



Hypothèses Taylor :

(A aller vérifier)

- Taylor Young : la fois diff au point
- Taylor Lagr. : la fois diff si un voisinage + maj de la diff (k+1)ème
- Taylor vertic. int : $\mathcal{O}(k+1)$

Léon 226: Suites vectorielles et réelles définies par une relation
 $u_{n+1} = f(u_n)$. Exps et applications.

I Développement 2 (Processus de Galton-Watson)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mu \in \mathcal{L}^1$ $m = E(\mu)$

$(\xi_{ij})_{i,j}$ ($i \geq 1, j \geq 0$) de loi μ

$X_{n+1} := \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{i,n}$ et $X_0 := 1$ ps.

On cherche $\mathbb{P}(\exists n, X_n = 0) = \dots$

Soit G_n la fonction génératrice de X_n .

$G_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z \mapsto E[z^{X_n}] = \sum \mathbb{P}(X_n = k) z^k$$

Fait: $G_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0)$

1 On montre que $G_n = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}$ où $G = z \mapsto E[z^\mu]$

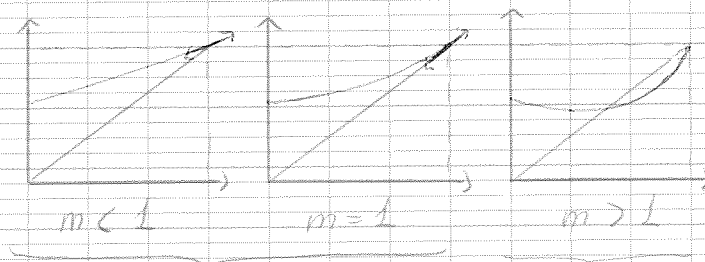
↳ Démon par récurrence

→ en notant $u_n = G_n(0)$ on a $u_{n+1} = G(u_n)$

2 Etude de G sur $[0, 1]$

↳ G est et convexe

3 cas :



Un unique point fixe : 1 $\exists c < 1, u_n \rightarrow c$

Rq : Qd on écrit $E(\mu)$ par exple abus de langage : on devrait écrire $E(X)$ pour X une variable aléatoire de loi μ .

II

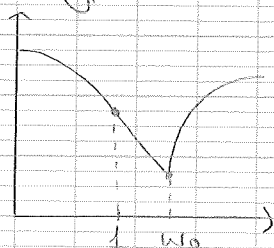
Questions plain

- Exple 6 : pourquoi ce nom ?
- Prop 10 : à part Fibonacci, d'autres appli ?
- Thm 19 (pt fixe de Picard) : pourquoi fondamental en analyse ?
- Appli 21 (méthode de Newton) : précisez ce que vous devrez présenter dans le développement.

Et comment ça marche en dimension 2 ?

- Thm 24 : quelques éléments de démonstration ?
- Def 28 : un exple où la méthode de relaxation permet d'améliorer la vitesse de convergence.

↳ Le graphique ressemble un peu à ça :



Argut heuristique : les vps sont c'

III

Exercices

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha + \frac{1}{2} \sin(u_n + v_n) & u_0 = 1 \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \cos(x + u_n - v_n) & v_0 = 2 \end{cases}$$

$x > 0$ Propriété de convergence selon α ?

u_n, v_n sont bornées

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} \sin((u_n - \alpha) + \alpha + (v_n - 1) + 1)$$

$$v_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \cos((u_n - \alpha) + 2\alpha - (v_n - 1) + 1)$$

$$\begin{cases} a_n = u_n - \alpha \\ b_n = v_n - 1 \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(a_n + \alpha + b_n + 1) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(a_n - b_n + 2\alpha - 1) \end{cases}$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1/2, 1/2]^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2} \sin(x + y + (x+1)), \frac{1}{2} \cos(x - y + 2x - 1) \right) \end{cases}$$

f contractante ? (pt fixe de Picard)

→ on regarde la norme de la différentielle
(= norme de la Jacobienne)

(utiliser le TAF ? si oui bs d'une norme subordonnée ?)

IV Commentaires

- Le cas à coefficients constants $u_{n+1} = A u_n$ impl.
Problèmes de diagonalisation de A (= on veut la puissance
n-ème de A par le calcul explicite).

plénitude de figurer dans le plan.

- Dvt 2: problème de définition des objets
(on voit problème à ce niveau)

μ mesure, puis fnc: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

- Dvt 2: un peu HS ? La fonction itérée et la 3 dérivée
apparaissent à la fin du dvt.

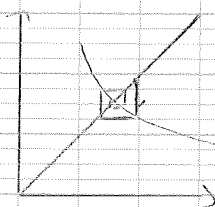
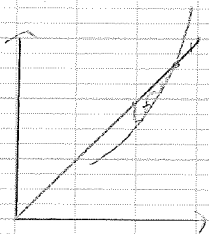
"Il est absolument nécessaire d'organiser son dvt pr qu'ils
apparaissent au début / plus tôt."

- Dvt 2: le fonz est demandeur de proba.

- Un bon exple: les suites homographiques

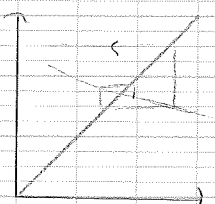
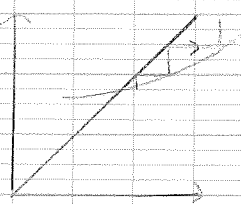
- Manque de dérivé ds le plan. Dessins à faire:

$|f'| > 1$
(au pt fixe)



attractif

$|f'| < 1$
(au pt fixe)



répulsif

$f' > 0$
(au pt fixe)

$f' < 0$
(au pt fixe)

- Pls d'analyse numérique.
- fractales, syst dynamiques, ...
 $z \mapsto z^2 + c$ $\{z \text{ de Julia}\}$
 Kanban
- Théor de récurrence de Poincaré
- Densité : $\mathcal{P}^\infty([0,1])$ $f \mapsto f'$ $f_h = f^{(h)}$ } densité