NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Autre sujet :

Dans tout ce plan, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Définitions, généralités.

Déf 1 : on appelle suite numérique une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Déf 2 : une suite numérique (u_n) est dite convergente de limite $l \in \mathbb{K}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_0, |u_n - l| < \varepsilon$

Déf 3 : une suite non convergente est dite divergente

Exemple 4 : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.
la suite $((-1)^n)$ diverge
la suite (n) diverge

Prop 5 : toute suite convergente est bornée
La réciproque est fausse en général, cf. 2e exemple ci-dessus.

Th 6 (~~stab~~ compatibilité de la limite avec les opérations algébriques) :
$(\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre et la fonction
$$(u_n) \longmapsto \lim_{n \to +\infty} u_n$$
est un morphisme de cette algèbre dans $(\mathbb{K}, +, \times, \times)$.

Th 7 (unicité de la limite) : une suite ne peut avoir qu'une limite.

Déf 8 : on appelle extraction toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante.

Déf 9 : soit (u_n) une suite numérique, on appelle sous-suite de (u_n) ou suite extraite de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une extraction.

Déf 10 : on dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) si α est limite d'une sous-suite de (u_n)

exemple 11 : $\left(\frac{1}{n}\right)$ a une seule valeur d'adhérence qui est 0.
(n) n'a pas de valeur d'adhérence
$((-1)^n)$ a deux valeurs d'adhérence : 1 et -1

Théorème 12 : si (u_n) est convergente alors la limite de (u_n) est son unique valeur d'adhérence

Théorème 13 : (réciproque aux 5 et 12) : une suite est convergente si et seulement si
$\begin{cases} \text{elle est bornée} \\ \text{elle a une unique valeur d'adhérence} \end{cases}$

exercice 14 : si $u_n^2 \longrightarrow 1$ et $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$, montrer que (u_n) converge

~~exercice 15 : si u_n est bornée et $(u_{n+1} - u_n)$ converge, montrer que u_n converge.~~

II spécificités de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Th 16 (admis) : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Th 17 (admis) : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné archimédien.

remarque 18 : ces deux théorèmes découlent de la construction de $\mathbb{R}$. Ils suffisent à caractériser $\mathbb{R}$ (à isomorphisme près).

Th 19 : (passage à la limite dans les $\leqslant$)
si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et si u_n et v_n convergent alors
$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Th 20 : Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée converge ;
toute suite décroissante minorée converge ;
toute suite monotone borné converge.

Application 21 : Th : (suites adjacentes)
si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que
- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$

alors (u_n) et (v_n) convergent.
Si en outre $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
alors elles ont la même limite.

Application 22 : ~~Théorème des valeurs intermédiaires~~ Théorème de Bolzano-Weierstrass :
toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Exercice 23 : si (u_n) est bornée et que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ converge, montrer que (u_n) converge.

~~Application 24~~

Définition 24 : soit (u_n) une suite réelle.
La suite $\sup_n \{u_k \mid k \geqslant n\}$ est décroissante ~~et majorée~~ donc converge dans $[-\infty, +\infty[$
sa limite est notée $\limsup u_n$

On définit de même $\liminf u_n$ comme la limite croissante de
$$\left(\inf \{u_k \mid k \geqslant n\}\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Théorème 25 :
$$\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$$

Théorème 26 : si $\forall n$, $u_n \leqslant v_n$ alors
$\liminf u_n \leqslant \liminf v_n$
et $\limsup u_n \leqslant \limsup v_n$

Théorème 27 : (u_n) converge si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n$

Théorème 28 : si $\limsup u_n \in \mathbb{R}$, c'est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n)
si $\liminf u_n \in \mathbb{R}$, c'est la plus petite valeur d'adhérence de u_n.

Application 29 : théorème d'encadrement :
si $\forall n$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
et si (u_n) et (w_n) convergent vers $l \in \mathbb{R}$
alors v_n converge aussi vers l.

III. Le point de vue des séries

Définition 30 : on appelle série de terme général u_n la suite
$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Prop 31 : une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge

Théorème 32 : si $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $u_n \sim v_n$
alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Si elles divergent alors
$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \sim \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$
si elles convergent alors
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Application 33 : (Théorème de Césaro) : si (u_n) converge vers l alors $\left(\frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.

Application 34 : méthode de Raab-Duhamel : si $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et si
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$

Exercice 35 : donner un équivalent de la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

IV Point de vue topologique

Définition 36 : une suite (u_n) est dite de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n > n_0, \forall p > n_0, \quad |u_n - u_p| < \varepsilon$$

Théorème 37 ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets) : toute suite de Cauchy réelle ou complexe est convergente.

Théorème 38 : toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème 39 : (caractérisation séquentielle de la limite) : une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est continue ~~si et seulement si~~ en $l \in \mathbb{K}$ ssi
$$\forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$$

Application 40 : théorème des valeurs intermédiaires : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule sur $[a, b]$.

~~Définition~~

Théorème 41 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) : Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

On a même

Théorème 42 : tout réel admet un unique développement décimal propre

Application 43 :
$$\text{Card } \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$$

Théorème 44 : l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé

Exemple 45 : ~~mod~~ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

↳ DÉVELOPPEMENT

⊕ parler de vitesse de convergence.

$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\sum \log(v_n) = \sum$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$v_n = n^a u_n$

$\sum w_n = \sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^a + \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \sum \frac{a}{n} + \dots + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si ~~f~~ non bornée.
(u_n).

Alors a v.a. $\exists n_0 \,/\, u_{n_0} \in [a-1, a+1] = K$
$\exists n_1 \,/\, u_{n_1} \notin [a-1, a+1]$.

$\exists n \,/\, u_n \in [a-1, a+1]$
$u_{n+1} \notin [a-1, a+1]$

$u_{n+1} = f(u_n)$ $\quad u_{n+1} \in f(K) \setminus K$

$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$
$u_n \in f(K) \setminus K$.