222*

NOM : DURAND Prénom : Romain Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 222* : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Autre sujet :

(Evans, Di Menza, Berg (distribution))

I) Equations de transport et de propagation.

1) Equations de transport.

Def 1 : Une équation de transport est une équation de la forme $\partial_t u + v(x,t)\partial_x u = f(x,t)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$. On dit qu'elle est homogène si $f \equiv 0$.

Méthode des caractéristiques

L'idée consiste à chercher des courbes $\xi(t)$ le long desquelles une solution a un comportement connu.

Rq 2 : Si u est solution de $\partial_t u + v(x,t)\partial_x u = 0$ pour $t>0$ et $u|_{t=0} = u_0$, et $\xi(t)$ est solution de $\begin{cases} \xi'(t) = v(\xi(t),t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$

alors $\partial_t (u(\xi(t),t)) = \partial_t u(\xi(t),t) + v(x,t)\partial_x u(\xi(t),t) = 0$

donc $u(\xi(t),t) = u(\xi(0),0) = u_0(\xi_0)$

Ex 3 : • Pour $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$, $\xi(t) = ct + \xi_0$ et $u(x,t) = u_0(x-ct)$

• Pour $\partial_t u + v(t)\partial_x u = 0$, $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t v(s)ds$; $u(x,t) = u_0(x - \int_0^t v(s)ds)$

• Pour $v(x,t) = \frac{x}{t^2+1}$, $\xi(t) = \xi(0)\arctan t$.

Rq 4 : Cette méthode fonctionne dès que $v(x,t)$ est linéaire en x, puisqu'alors, les caractéristiques recouvrent $\mathbb{R}^n \times [0,\infty[$ sans se couper.

Rq 5 : On peut raffiner cette méthode pour résoudre les équations • $\partial_t u + v(t)\partial_x u = f$

• $\partial_t u + v(t)\partial_x u + cu = 0$.

2) Equation des ondes

En dimension 1, l'équation des ondes est

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = g \text{ et } \partial_t u = h & \text{sur } \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{cases}$$

Rq 6 : $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ se factorise en deux termes de transport : $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$;

En posant $v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$, on a $\partial_t v + \partial_x v = 0$

donc $v(x,t) = a(x-t)$ avec $a = v(x,0)$.

Puis $\partial_t u - \partial_x u = a(x-t)$

d'où $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy + \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]$

Thm 7 : Si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u(x,t)$ défini comme en 6) Alors $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$, $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ et $u(x,t) \to g(x_0)$, $\partial_t u(x,t) \to h(x_0)$ quand $(x,t) \to (x_0,0)$

Rq 8 : u s'écrit $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$ pour F, G convenables et réciproquement, toute fonction de cette forme est solution de $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. C'est une conséquence de la factorisation $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$.

Def 9 : La solution au point (x,t) ne dépend que des conditions initiales dans l'intervalle $[x-t, x+ct]$. On définit donc les cônes de dépendance et d'influence comme sur l'annexe.

Prop 10 : Si les conditions initiales sont à support compact, u l'est également dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ et l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2 dx$ est constante. Il y a donc une unique solution si elle existe.

II) Équations de Poisson et de Laplace :

L'équation de Laplace est $\Delta u = 0$, celle de Poisson $-\Delta u = f$.

1) Fonctions harmoniques et propriétés des solutions

Def 11 : Une fonction $u \in \mathcal{C}^2$ est dite harmonique si $\Delta u = 0$.

Prop 12 : Si u est $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $\mathcal{U}$, alors, pour toute boule $B(x,r) \subset \mathcal{U}$, on a
$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \, dS = \fint_{B(x,r)} u \, dy$$

Thm 13 : Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ vérifie la propriété 12, alors elle est harmonique

Prop 14 : (Principe du maximum) Si $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}})$ est harmonique sur $\mathcal{U}$,
Alors $\max_{\overline{\mathcal{U}}} u = \max_{\partial\mathcal{U}} u$ et si $\mathcal{U}$ est connexe et qu'on a $x_0 \in \mathcal{U}$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{\mathcal{U}}} u$, alors u est constante sur $\mathcal{U}$.

Cor 15 : Si $g \in \mathcal{C}^0(\partial\mathcal{U})$, $f \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$, alors il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{U}})$ de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \mathcal{U} \\ u = g & \text{sur } \partial\mathcal{U} \end{cases}$.

domaine bornée + bord régulier

Thm 16 : Si u est continue et satisfait la propriété de la moyenne sur $\mathcal{U}$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.

2) Méthodes énergétiques

Prop 17 : ~~Si u est harmonique et $\mathcal{C}^2$, alors $\int |\nabla u|^2 dx = 0$.~~ Faux (ex : fonc° affine)

Cor 18 : Cela fournit une autre preuve de l'unicité des solutions régulières

Thm 19 : Soit $\mathcal{A} = \{ w \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{U}}), w = g \text{ sur } \partial\mathcal{U} \}$ et $I[w] = \int_{\mathcal{U}} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \, dx$

Alors $u \in \mathcal{A}$ est solution de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \mathcal{U} \\ u = g & \text{sur } \partial\mathcal{U} \end{cases} \iff I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$.

3) Vers l'existence.

Rq 20 : L'équation $\Delta u = 0$ est invariante par rotation, on peut chercher les solutions comme étant radiales : $u(x) = v(|x|)$.

Prop 21 : En écrivant $\Delta u = 0$ pour $u(x) = v(r)$ où $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$,
On obtient $v(r) = \begin{cases} b \log r + c & \text{si } n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$.

Def 22 : On définit $\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$ où $\alpha(n)$ est le volume de la sphère. Φ est définie pour $x \neq 0$.

III) Analyse de Fourier, équation de la chaleur.

L'équation de la chaleur est $\partial_t u - \Delta u = 0$.

1) Domaine périodique et séries de Fourier.

Cadre : $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \frac{dt}{2\pi})$

Def 23 : Si $f \in L^2$, on définit $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Prop 24 : (Parseval) $L^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie.

Prop 25 : Si $f \in \mathcal{C}^1$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{+inx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $c_n(f') = (in) c_n(f)$

Prop 26 : (Équation de la chaleur sur le cercle)
Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et $u_0 \in L^2(\mathbb{U})$. Alors il existe une unique solution $u : \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ telle que
i) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$
ii) $\partial_t u - \Delta_x u = 0$ sur $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$ (dim 1 $\to$ $\Delta_x = \partial_{x^2}$)
iii) $u \xrightarrow[t \to 0]{L^2} u_0$.

DVP 1

2) Espace tout entier : Transformée de Fourier

(FGN4, analyse)

Def 27 : Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose
$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) \, dx$$
$$\check{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(x) \, dx.$$

Thm 28 : (Plancherel) Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|\check{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

Rq 29 : Par densité, on prolonge la définition de $\hat{u}$ et $\check{u}$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Prop 30 : Si $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors

i) $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \overline{\hat{v}} \, dy$

ii) $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$ pour tout multi-indice α tel que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

iii) $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{v}$

iv) $u = \check{(\hat{u})}$

Rq 31 : $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$ pour $t > 0$.

Cor 32 : On peut transformer une EDP sur u en une E.D.L sur $\hat{u}$ puis inverser $\hat{u}$ pour obtenir u.

Ex 33 : (Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$)

L'équation $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u_{|t=0} = g \end{cases}$ donne $\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}$ donc $\hat{u}(\xi, t) = \hat{g} e^{-|\xi|^2 t}$

et on donne $\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

Rq 34 : × Il y a invariance par rotation de l'équation

× Si u est solution, $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ également : intérêt du rapport $\frac{x^2}{t}$.

× On reconnait pour Φ, à un facteur près, le noyau gaussien du mouvement brownien, ce qui suggère que ces deux objets sont en forte interaction.

IV) Equations elliptiques et techniques Hilbertiennes

Prop 35 : Si Ω est borné, alors $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ pour une constante C dépendant de p et Ω.

Def 36 : $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, c'est un espace de Hilbert pour $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u . \nabla v + u.v \, dx$.

Def 37 : On dit que L est un opérateur elliptique si $Lu = -\sum_{ij} \partial_{x_j}(a_{ij}(x) \partial_{x_i} u) + \sum_i b_i(x) \partial_{x_i} u + cu$ où les a_{ij} sont symétriques et a_{ij}, b_i, c sont L^∞.

Def 38 : L est uniformément elliptique si $\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$ pour un $\theta > 0$.

Rq 39 : Si $u \in \mathcal{C}_c^\infty$ et $Lu = f$ pour f L^2, alors pour $v \in C_c^\infty$, $\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \partial_{x_i} u \partial_{x_j} v + \sum_i b_i \partial_{x_i} u \, v + cuv = \int_\Omega f v$

Def 40 : On note B la forme bilinéaire associée à L sur $H_0^1 \times H_0^1$: $B[u,v] = \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij} \partial_{x_i} u \partial_{x_j} v + \sum_i b_i \partial_{x_i} u \, v + cuv$

. On dit que $u \in H_0^1$ est solution faible si $B[u,v] = (f, v)_{L^2}$ $\forall v \in H_0^1$.

Thm 41 : (Lax-Milgram) Soit H un Hilbert et $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire tel que $|B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ et $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u]$ pour $\alpha, \beta > 0$ et tout $(u,v) \in H_0^1$. Soit f une forme linéaire sur H continue. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $B[u,v] = \langle f, v \rangle$

Prop 42 : (Estimées d'énergie) Soit B associé à L uniformément elliptique. Alors il existe $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \geq 0$ tels que $|B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$ et $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u,u] + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ $\forall u, v \in H_0^1$.

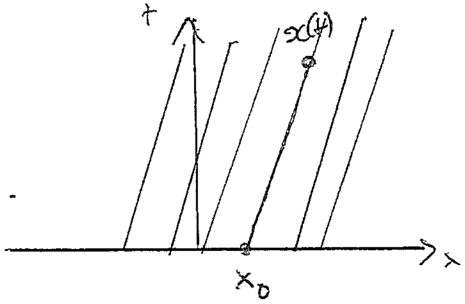
Dev 2

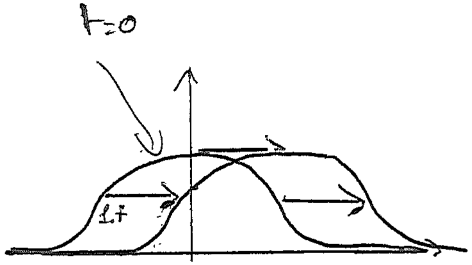
Cor 43 : $\exists \gamma \geq 0$ tel que $\forall \mu \geq \gamma$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ à $\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Rq 44 : Le cas $\gamma = 0$ est différent du cas $\gamma > 0$ où on ne peut pas appliquer directement Lax-Milgram. C'est le cas pour $Lu = -\Delta u$ ou si les b_i sont nuls et $c > 0$.

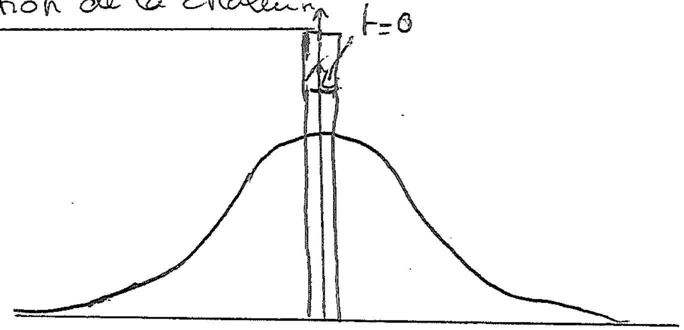
Annexe

$\partial_t u + c\partial_x u = 0$, $c>0$





Equation de la chaleur



Cônes de dépendance et d'influence