

NOM : PNAULT

Prénom : Laureline

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Autre sujet :

DT
1

Dans toute la leçon, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(I) Étude théorique

1.1) Définitions

Def 1. Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Une équation différentielle linéaire d'ordre p sur K^n est une équation :

$$(E) \quad y^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} A_i(t) y^{(i)} + B(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_i : I \rightarrow M_p(K) \\ B : I \rightarrow K^n \end{cases}$$

On appelle équation différentielle linéaire homogène associée :

$$(E_H) \quad y^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} A_i(t) y^{(i)}$$

• Si $n=1$ l'équation est dite scalair. Sinon on parle de système d'équations différentielles linéaires.

Exple 2
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
 et un système différentiel homogène linéaire

Rq 3. On peut ramener toute équation différentielle d'ordre p sur K^n à un système différentiel d'ordre 1 sur K^{np} par :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ A_0(t) & 0 & I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p-1}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On ramènera donc l'étude aux équations différentielles d'ordre 1.

1.2) Structure de l'espace des solutions

Thm 4. $\forall A \in \mathcal{C}^0(I, M_p(K)), B \in \mathcal{C}^0(I, K^n), b \in I, x_0 \in K^n$

Il existe une unique solution y du problème $y' = A(t)y + B(t)$ effec. p'd

(Cauchy-Kipschitz, fonction)

Rq 5. La version pour les équations d'ordre p n'est pas de connaître

$x_0, \dots, x_{p-1}$ tels que $y(b) = x_0, \dots, y^{(p-1)}(b) = x_{p-1}$.

Exple 6. Connaissant la position initiale, la vitesse initiale et les forces appliquées à tout moment on peut en appliquant le PFD connaître de manière unique la trajectoire d'une particule de masse m .

Corollaire 7 (Structure de l'espace des solutions)

• L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (E_H) est un espace vectoriel isomorphe à K^{np} par $\Phi_b : \mathcal{S}_H \rightarrow K^{np}, y \mapsto y(b)$.
• L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace affine dirigé par $\mathcal{S}_H$.

Exemple 8. (Méthode d'une fonction). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto f(x+a)$. Alors f_a est solution de (E_H) et de dimension finie ssi f est solution d'une E.D. à coefficients constants.

Corollaire 9. (Principe de superposition des solutions)

Si X_1 est solution de $X' = A(t)X_1 + B_1(t)$ et X_2 est solution de $X' = A(t)X_2 + B_2(t)$ avec A, B_1, B_2 continues alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est solution de $X' = A(t)X + (B_1(t)\lambda + B_2(t)\mu)$.

Exemple 10. Pour résoudre $y' + y = 4e^t$ on résout d'abord $y' + y = 0$ puis $y' + y = 4e^t$.
 Δ (Ce résultat ne sert pas à résoudre les équations sans terme inhomogène)

Contre-exemple 11. $xy' = y^2 + x$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ contre-exemple 12. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' = 2y$ est un espace vectoriel de dimension 2.

1.3) Résolution

Def 13. $R(t, b) = \Phi_b \circ \Phi_t^{-1}$ est un isomorphisme $K^{np} \rightarrow K^{np}$ reliant de (E_H) .

Prop 14. (i) $\forall t \in I, R(t, t) = I_{np}$

(ii) $\forall b, t_1, t_2 \in I, R(t_2, t_1)R(t_1, b) = R(t_2, b)$

(iii) $R(t, b)$ est la solution de $\frac{d}{dt} R(t, b) = A(t)R(t, b)$

$\begin{cases} R(t, b) = I_{np} \\ R(t, b) = I_{np} \end{cases}$

Rq 15. Bien que l'équation vérifiée par la fonction est plus compliquée que celle de départ elle peut se montrer efficace pour résoudre la structure d'algèbre de $\mathcal{S}_{\text{lin}}(K)$.

Exple 16. Si $V, W \in \mathcal{S}$ $A(t)V(t) = A(t)W(t)$ alors $R(t, b) = \exp \left(\int_b^t A(s) ds \right)$

Def 17. Le wronskien d'une famille de solutions $Y_1, \dots, Y_p$ de (E_H) est le déterminant de cette famille : $W(t) = \det(Y_1(t), \dots, Y_p(t))$

Prop 19. $W(t) = \det(R(t, b)) \det(Y_1(b), \dots, Y_p(b)) = \exp \left(\int_b^t \text{tr}(A(s)) ds \right) \det(Y_1(b), \dots, Y_p(b))$ $\forall b \in I$

Coefficient 19. $(Y_1, \dots, Y_p)$ solutions de (E_H) forment une base de $\mathcal{Y}_H$ si $\forall t \in I, \forall (Y_1, \dots, Y_p)(t) \neq 0$ si $\exists t_0 \in I, \forall (Y_1, \dots, Y_p)(t_0) \neq 0$.

II) Méthodes pratiques de résolution.

D'après le corollaire 7 il va s'agrandir part de trouver une base de solution de $\mathcal{Y}_H$ et d'autre part de trouver une solution particulière de $\mathcal{Y}$.

III.1) Recherche d'une base de solutions homogènes

Cas 20. (Ordre 1 sur $\mathbb{K}$) $(E_H) \quad y' = a(t)y, \quad \mathcal{Y}_H = \{e^{\int a(t) dt}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ où α est une primitive de a .

Exemple 21. $\mathcal{Y}_H$ solution de $(t^2-4)y' + ty = 0$ sont $\{t, \ln|t-2|, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Cas 22. (Abaissement de l'ordre dans le cas scalaire). $(E_H) \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)}$ où $a_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \quad \forall i$. φ solution de (E_H) . On cherche une solution sous la forme $y = g\varphi$ où g est $\mathcal{C}^p$. Alors φ est solution de (E_H) et g est solution d'une équation différentielle d'ordre p .

Exemple 23. $(E_H) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y, \quad \varphi$ solution de $(E_H), \quad f = g\varphi$ solution si g est solution de $(2g\varphi' + g''\varphi) = a(t)g'\varphi$.

Cas 24. (Système linéaire homogène à coefficients constants). $(E_H) \quad Y' = AY$ où $A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{Y}_H = \{t \mapsto \lambda e^{tA}, \lambda \in \mathbb{R}\} \approx e^{\lambda t} \sum_{i=1}^n A^i$

Prop 25. Si λ est de A de $\vec{v}$ V alors $t \mapsto e^{\lambda t} V$ est solution en $\mathcal{Y}(0) = V$.
Si A est triangulaire et $(V_1, \dots, V_n)$ base de $\vec{v}$ associée aux v_p $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$ est une base de $\mathcal{Y}_H$

Application 26. (Etude de $Y' = AY$ lorsque $A \in M_2(\mathbb{R})$): portait de phase selon ses valeurs propres de A : en exemple (p. 4)

Cas particulier 27. (équations scalaires d'ordre p à coefficients constants) $(E_H) \quad y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0, \quad \text{soit } P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ le polynôme caractéristique de (E_H) . Alors $\mathcal{Y}_H = \{t \mapsto \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} P_i(t)\}$ où λ_i sont les racines de P et P_i est de degré strictement plus petit que la multiplicité de λ_i .

Exemple 28. Résolution de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$.

III.2) Recherche d'une solution particulière.

Méthode 29. (variation des constantes). $(E) \quad Y' = A(t)Y + B(t)$ $R(t, t_0)$ la résolvante de $(E_H) \quad Y' = A(t)Y$. Alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $Y(t) = R(t, t_0) V(t)$ avec $V(t)$ différentiable. Alors on a une solution particulière sous la forme $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, u) B(u) du$

Exemple 30. Résolution du système $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cas particulier 31. $(E) \quad Y' = AY + e^{\lambda t} P(t)$ où P est un polynôme. Alors $\exists t \mapsto e^{\lambda t} Q(t)$ solution de (E) où Q est un polynôme de même degré que P si λ n'est pas valeur propre de A - de degré strictement supérieur à p si λ est valeur propre de A

Exemple 32. Résolution de $y' + y = \ln(t)$ (exemple 30)

Méthode 33. On peut rechercher une solution particulière sous forme de fraction d'entier en série entière.

Exemple 34. $x \mapsto x-1$ est solution de $(2x-x^2)y' + (x-1)y - 1 = 0$

III) Se ramener au cas linéaire ?

III.1) Exemples d'équations se ramenant à des EOL

Exemple 35. (Equations de Bernoulli). $(E) \quad \frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha$ on pose $z = y^{1-\alpha}$ on est ramené à une EOL en z .

Exemple 36. (Equations de Riccati). $(E) \quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ Si on connaît une solution particulière y_1 alors en posant $z = y - y_1$ on se ramène à une équation de Bernoulli en z avec $\alpha = 2$.

Exemple 37. Résoudre $(1-x^2)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$ en remarquant que $x \mapsto x^2$ est solution particulière.

III.2) Stabilité et Antistabilité locale.

On considère maintenant une équation différentielle homogène quelconque $(E_+1) : Y' = f(t, Y)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de condition initiale $Y(t_0) = X_0$. On suppose que la solution maximale de ce problème est définie sur $[t_0, +\infty[$, note Y_{X_0} .

Def 38 • On dit que Y_{X_0} est stable si il existe une boule $B(X_0, r)$ et $C > 0$ telles que :

- (i) $\forall x \in B(X_0, r), t \mapsto Y_x(t)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$
- (ii) $\forall x \in B(X_0, r), \forall t \geq t_0, \|Y_x(t) - Y_{X_0}(t)\| \leq C \|x - X_0\|$.
- Y_{X_0} est asymptotiquement stable si elle est stable et si : $\exists B(X_0, r), \exists \gamma : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue de limite 0 en $+\infty$ tq $\forall x \in B(X_0, r), \forall t \geq t_0, \|Y_x(t) - Y_{X_0}(t)\| \leq \gamma(t) \|x - X_0\|$.

Cas particulier 39 (système linéaire à coefficients constants).

Th 40 $Y' = AY$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A . Les solutions de (E_+) sont : - asymptotiquement stables si $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$
- stables si $\forall i \text{ Re}(\lambda_i) < 0$ ou $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ et Re bloc correspondant à λ_i est en fait diagonalisable.

Th 40 (Morpion). Soit $(E) : Y' = f(Y)$ de condition initiale $Y(t_0) = x$ une équation différentielle autonome avec $f \in \mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $a \in U$ tq $f(a) = 0$. On note $A = df_a$ et on suppose que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) < 0$.

Alors les solutions de (E) ont au voisinage de a le même comportement asymptotique que les solutions de $(L) : Y' = AY$ de condition initiale $Y(t_0) = x$.
 a est un point d'équilibre exponentiellement attractif de (E) et de (L) .

IV Exemples d'applications directes des E.D. dans diverses domaines

Exemple 41 Une particule de masse m et de charge électrique q se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ sous l'effet d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ uniformes a une vitesse $\vec{v}$ qui est solution d'une équation différentielle :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} + \frac{q}{m} \vec{E}$$

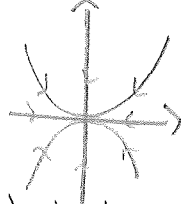
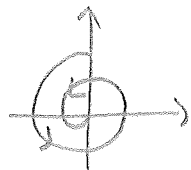
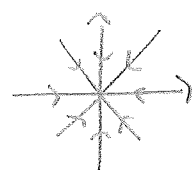
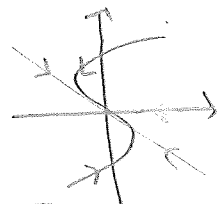
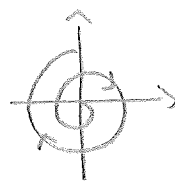
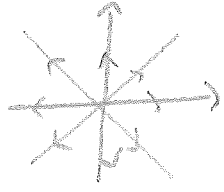
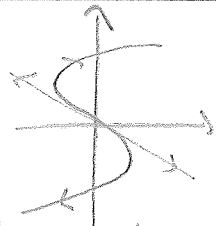
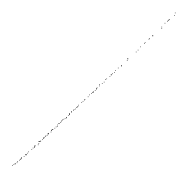
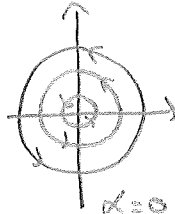
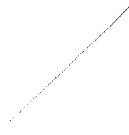
Exemple 42 (thm fondamental des courbes gauches)

I un intervalle de $\mathbb{R}, \gamma \in \mathcal{C}^4(I, \mathbb{R}^{3*}), K \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
Alors $\exists (I, g)$ un $\mathcal{C}^2$ -arc géométrique biregulier paramétré par longueur d'arc tel que sa courbure soit γ et sa torsion soit K .

Exemple 43 (résolution d'équations matricielles)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B), \text{Re}(\lambda) < 0$

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

λ_1, λ_2 vp de pt d'équilibre A	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\in \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 =$ $\alpha \neq 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$	
Stable	 $\lambda_2, \lambda_1 < 0$	 $\alpha < 0$	 $\dim E_\lambda = 2, \lambda < 0$	 $\dim E_\lambda = 1, \lambda < 0$
Instable	 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 < 0$	 $\alpha > 0$	 $\dim E_\lambda = 2, \lambda > 0$	 $\dim E_\lambda = 1, \lambda > 0$
Aucun		 $\alpha = 0$		

Leçon 221 : Equations diff. linéaires, systèmes d'équations diff. linéaires. Exemples et applications

I Questions - dvt.

- Plus de détails sur le passage à la limite (uniformel de l'intégrale)?
 ↳ échange $\lim$ et $\int$ pour la suite $(AX_n + B)$ qui cvge unif car (Y_n) cvge unif + A et B bornées (← sur J segment !! Impit).
- Plus de détails sur le : "il suffit de montrer pr $J \subseteq I$ " et "ops $J =$ "
 ↳ problème de le faire si $J = [t_0, t_1]$ Jce d'une solⁿ à dr de t_0 et à gche de t_1 mu si $\neq I$?

II Questions - plan

- Propriétés de l'intervalle de définition I ?
 ↳ Intérieur non vide = non réduit à un singleton.
 Problème de définition aux bornes si I n'est pas ouvert.
 Que veut dire la dérivée? Deux solutions : dérivée à gche (ou à dr) ou dérivée si on ptt ouvrir autour (comme ça en dimension + gte).
 Prendre I ouvert et le tps pour étudier ces problèmes.
 Possibilité ensuite de prolonger par continuité p⁴.
- Rque 5. Donner la version pour l'ordre p .
- Prop 18. (Wronkien). Dèm?
- Corollaire 19. Vraiment bs de wronkien pr montrer ça?
 Se montrer sur le wronkien (et la finle 18).
- Chm 40 (Lyapunov). Dèm? Idée de prvoir bs de Refd) K_0 (et alt de ça)?

III

Exercice

f FGN (?)

Soit φ continue sur $\mathbb{R}$ (E.H) $2x'' + \varphi(t)x = 0$

(u_1, u_2) une base de solution

Si f fonction, dérivée schwarzienne de $f =$

$$\frac{f^{(3)}}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f^{(2)}}{f'} \right)^2$$

On pose $f = \frac{u_1}{u_2}$

(a) f bien définie

(b) Calculer sa dérivée Schwarzienne

a) f n'est pas définie lorsque $u_2(t) = 0$

Soit $t \in \mathbb{R}, u_2(t) = 0$ est un ensemble de pts isolés

(En effet si $u_2(t) = 0$ alors $u_2'(t) \neq 0$ par C.L. linéaire

car sinon unicité de la solution or ces C.L. $\neq 0$ solution

$\rightarrow u_2 \equiv 0 \rightarrow (u_1, u_2)$ pas base)

Donc on peut prolonger f en ces pts donc par de pts

Wronskien

b) $f' = \frac{u_1' u_2 - u_1 u_2'}{u_2^2} = -W$

Or $w(t) = \exp\left(\int_0^t h(A)(t) dt\right) w(t_0)$

Or ici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi(t) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr} A = 0 \Rightarrow w$ est

$$f' = \frac{C}{u_2^2}$$

$$f'' = C \frac{-2u_2 u_2'}{u_2^3}$$

$$f^{(3)} = -2C \frac{u_2'' u_2^2 - 3u_2' u_2' u_2'^2}{u_2^5}$$

$$= -2C \left(\frac{u_2''}{u_2^3} - 3 \frac{u_2'^2}{u_2^4} \right)$$

$$\frac{f^{(3)}}{f'} = \frac{-2C' u_2'' \times \frac{u_2^2}{C} + 6C \frac{u_2'^2}{u_2^2} \times \frac{u_2^2}{C}}{u_2^3 \times \frac{u_2^2}{C}} = 2 \left(\frac{u_2''}{u_2} \right)^2 - 2 \frac{u_2''}{u_2}$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{f^{(2)}}{f'} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{-2C u_2'}{u_2^3} \times \frac{u_2^2}{C} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{-2u_2'}{u_2} \right)^2 = -6 \left(\frac{u_2'}{u_2} \right)^2$$

$$\frac{f(3)}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f(2)}{f'} \right)^2 = -2 \frac{u_2''}{u_2} = \varphi$$

Commentaire : • Esq de la prop 18: il est fondamental de noter que pour les équa d'ordre p le seul coeff non nul de $\text{diag}(A)$ est le coeff dir le terme d'ordre $(p-1)$.
 $\text{tr}(A) = \text{ce coeff}$ (donc ici $= 0$).

[--]