

NOM : AUFORT

Prénom : William

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Applications des formules de Taylor

Autre sujet : Références : Gourdon, Analyse ; Rouvière, Petit Guide de Calcul Différentiel ; Demilly, Analyse numérique et équations différentielles

Exemple 6 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \forall n > 0$
Exemple 7 $\forall x \in \mathbb{R},$
 $f(x) = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
Application 8 On utilise la formule de Taylor-Young pour démontrer le Théorème Central Limit.
Théorème 9 Si X est une v.a. dans $L^2, \mu = \mathbb{E}(X),$
 $\sigma^2 = \text{Var}(X) > 0, X_n$ est un échantillon de $X,$
 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$ alors

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{x\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2} dt$$

b) Applications en géométrie
a) Etude affine locale d'une courbe plane
Application 10 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in I.$
 On suppose l'existence des entiers:

$$p = \min \{k \geq 1 / \gamma' = \gamma^{(k)}(t) \neq 0\}$$

$$q = \min \{k > p / \gamma' = \gamma^{(k)}(t) \text{ non colinéaire}\}$$

 On peut alors définir de la part de p et q l'aspect de l'arc au voisinage de t (voir Figure 1)

On considère des fonctions de la variable réelle.
 I sera un intervalle de $\mathbb{R},$ et E un $\mathbb{R}$ -en (en pratique $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$)
I] Formule de Taylor-Young : Etude Locale
Théorème 1 (Taylor-Young)
 $f: I \rightarrow E$ de classe C^m sur $I.$
 $a \in I$ tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe.
 Alors, quand $h \rightarrow 0$ on a

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n h^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + o(h^{n+1}).$$

a) Application directe: Développement limite (DL)
Définition 2 Si $0 \in I$ et $n > 0, f: I \rightarrow E$ admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 si $\exists a_1, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Exemple 3: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$
Proposition 4: Si f admet un DL d'ordre $m,$ il est unique.
Proposition 5: Si f est n fois dérivable en 0, alors

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

② Etude métrique locale d'une courbe plane / Courbure

Application 11 Avec les relations précédentes, si

γ est C^2 et $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$

$$t \mapsto s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du \quad (a \in I \text{ fixé})$$

définit un C^2 difféomorphisme.

En notant $\beta(s) = \gamma(t)$, $\overrightarrow{T}(s) = \frac{d\beta}{ds}$ et $\overrightarrow{N}(s)$ le

vecteur obtenu par rotation de $\overrightarrow{T}(s)$ d'un quart de tour dans le sens direct, alors on a

$$\beta(s+h) - \beta(s) = R \overrightarrow{T}(s) + \frac{h^2}{2} C(s) \overrightarrow{N}(s) + o(h^2)$$

où C est la courbure de γ . (voir figure 2)

③ Pour une surface

Remarque 12 Avec la formule de Taylor-Young

pour les fonctions à plusieurs variables (théorème 3), on peut généraliser l'étude de l'application

pour une surface $z = f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 13 Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f fois différentiable en $a \in U$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a)h^k + o(\|h\|^k)$$

$$\text{ou } \frac{1}{k!} D^k f(a)h^k = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

Exemple 14 Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est deux fois différentiable au point (a, b) , alors

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)k^2 \right) + o(h^2 + k^2)$$

III Formules de Taylor et approximations

a) Expressions du reste

Théorème 15 Formule de Taylor - Lagrange

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^n sur $[a, b]$, $f^{(n)}$ existe sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

reste de Lagrange.

Théorème 16 Taylor avec reste intégral

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} , alors

$$F(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} F^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t) dt}_{\text{reste intégral}}$$

Exemple 17 $\forall x \geq 0$, on peut montrer avec Taylor

$$\text{Lagrange : } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Application 18 On étudie souvent l'ordre des

restes pour montrer qu'une fonction est développable en série entière (DESE)

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet : Dévt 2

Exercice 23 Si $f = \prod_{i=1}^m (x - \xi_i)^{m_i}$, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r$,
et si $x_0 > \xi_r$, on montre que
1) $x_m \rightarrow \xi_r$
2) Si $m_r = 1$, $|x_m - \xi_r| = o(c^n)$ $\forall c > 0$
3) Si $m_r \neq 1$, $|x_m - \xi_r| \approx c(1 - \frac{1}{m_r})^m$ pour un certain c

c) Méthodes numériques de calcul d'intégrales

Exemple 24 Méthode du point milieu :

Si f est continue sur $[a, b]$, $m \in \mathbb{N}^*$, on approxime $\int_a^b f(t) dt$ par :

$$M_m = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \text{ où}$$

$$x_i = a + i \frac{b-a}{m}$$

(voir Figure 4)

Les formules de Taylor avec reste permettent de mesurer l'erreur de la méthode :

Théorème 25 : Si f est C^m sur $[a, b]$, alors
 $\left| \int_a^b f(t) dt - M_m \right| \leq \|f^{(m)}\|_{[a, b]} \cdot \frac{(b-a)^3}{24m^2}$

En effet : $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ est
Proposition 19 f au voisinage de 0. Si et seulement si :
 $\exists \alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) :
 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

converge simplement vers 0 sur $] -\alpha, \alpha[$. La série
entière $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, appelée série de Taylor
à alors un rayon de convergence $\geq \alpha$ et
 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \forall x \in] -\alpha, \alpha[$.

Exemple 20 Si $f(x) = e^x$, $|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$
d'où $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 21 Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que
 $f^{(k)}(x) > 0 \quad \forall k$, alors f est D.E.S.M. $] -a, a[$

b) Application : vitesse de convergence d'une méthode

Définition 22 La méthode de Newton consiste à
chercher numériquement la racine de l'équation
 $f(x) = 0$ à partir d'une valeur donnée x_0 par :
 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (voir Figure 3)

Dévt 1

Figure 1

$$\overrightarrow{PH} = (k^p + o(h^p)) \cdot \vec{u} + (k^q + o(k^q)) \vec{h} \vec{u}$$

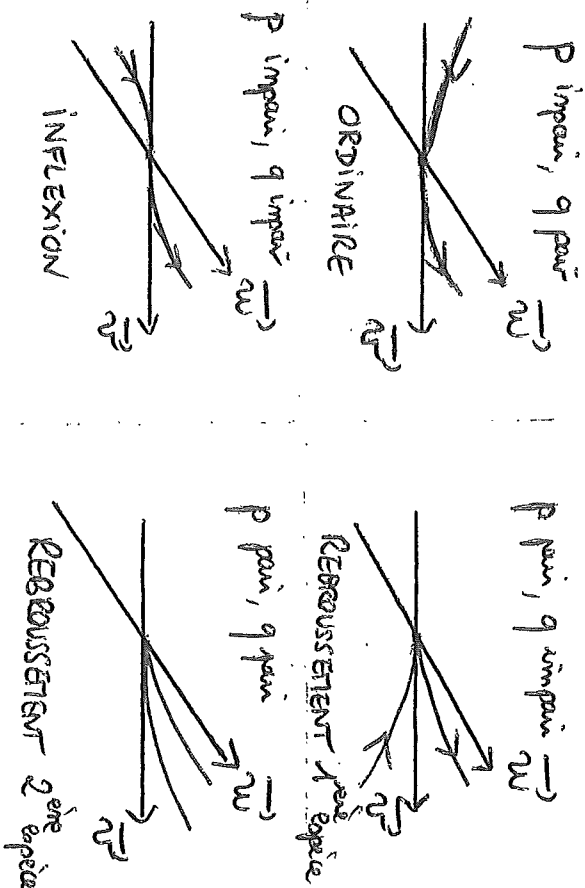


Figure 2

$$\beta(s+h) - \beta(s) = h \overrightarrow{T}(s) + \frac{h^2}{2} C(s) \overrightarrow{N}(s) + o(h^2)$$

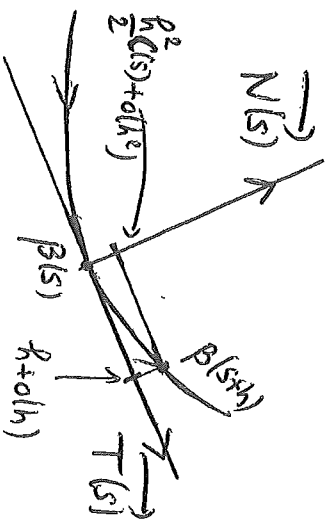


Figure 3

$$x_0 = a$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

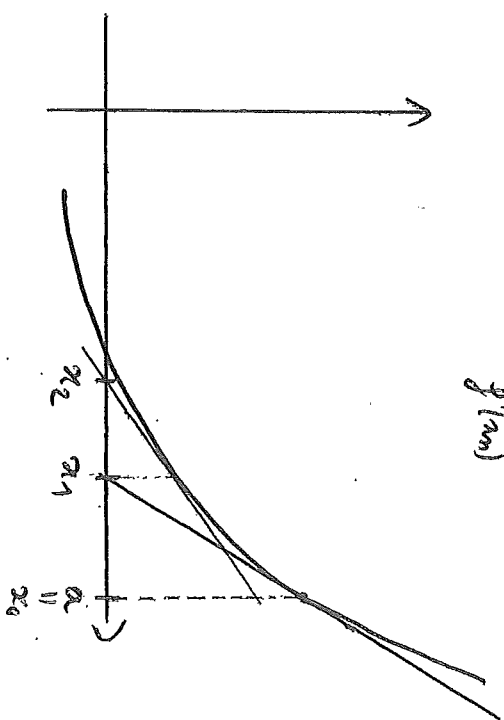
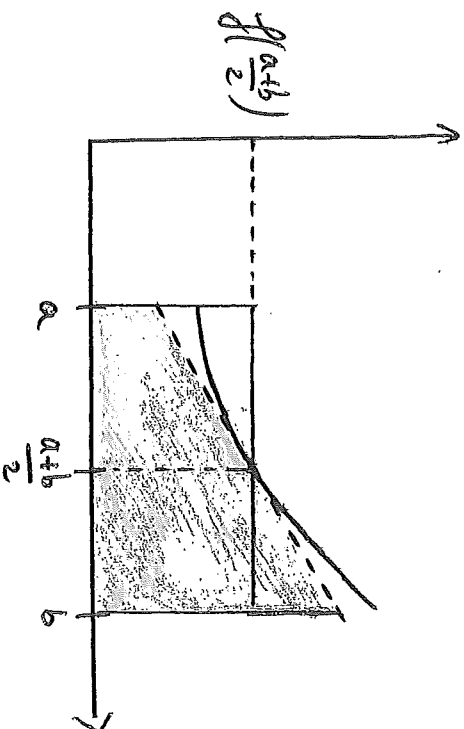


Figure 4

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



[Rqs Leçons]

- + d'exposés de chrs lim. + calculs de limites
- surfaces : faire figurer ? (Lemme de Morse ?) + div. (☺)
↑ justifie plan tangent.
- dire oralement (motiver)
 - ↳ rg 1 = rend linéaire la fnc. (local point)
 - ↳ pts inflexion, selon parité p.q, forme de la ch.
 - ↳ méthode Newton, pourquoi ce ch. là et par
un autre
($g(x) = x - f(x)/f'(x)$ nulle en le pt fixe $\Rightarrow$ cvge
interprétaⁿ géom.
- Implé de Itechin Approx de π av le ch. de arctan
(motivaⁿ des séries entières).
- Méthodes pour accélérer la vitesse de cvge des suite
 - ↳ Dz, & cours d'analyse de Pometet
- Ppes d'extremum, Taylor Lagrange (cf études supérieures...)
- Calculer + Poin de la calcul d'intégrales
 - ↳ exacts jusqu'à un certain deg de poly ?
 - ↳ méthode de quadrature de Gauss (cf Romailly)
- Possibilité d'approx de solvⁿ d'équa diff. (cf cours de
Sirlag, introduit à l'analyse numérique ... matricielle)
- Nommer le thm de Bernstein ()

Dts possibles

- Thm de Borel: on peut les trouver une fois. Et les dérivées successives en 0 sont = (an) n.e.n. en suite yague

↳ applica°: bcp de copies en choisissant bien (an) n.e.n.
• prolongent d'une fois def sur un compact

- Inégalités de Kolmogorov

↳ $f, f^{(n)}$ bornée sur $\mathbb{R} \Rightarrow \forall k \in [1, n-1], f^{(k)}$ bornée sur $\mathbb{R}$

↳ majoration de la dérivée k de f en fonction de ...
cf. analyse 1, :

(Exercices) (1)

→ $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est cont. sur $[0,1]$. On définit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$
à l'ordre $1/n$?

(ds approx d' $\int$).

- tend vers f' / de f (Σ de Riemann) (démonstration feuille 4)

→ on étudie $S_n - \int_0^1 f(t) dt$

$$\begin{aligned} - \int_0^1 f(t) dt - S_n &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (f(t) - f(k/n)) dt \end{aligned}$$

$$f(t) = f(k/n) + (t - k/n) f'(k/n) + \frac{1}{2} (t - k/n)^2 f''(y_k)$$

$$\hookrightarrow \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} (t - k/n) f'(k/n) dt + \frac{1}{2} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (t - k/n)^2 f''(y_k) dt \right)$$

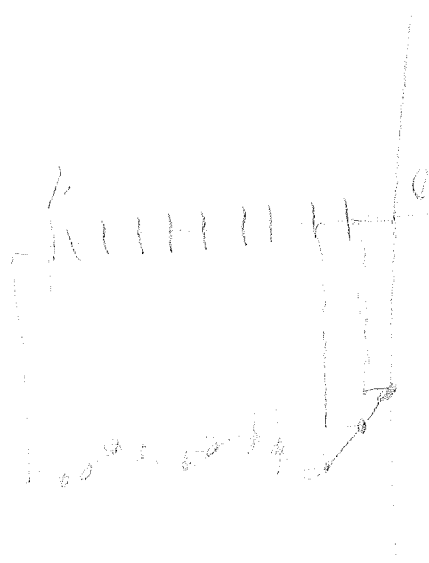
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_{k/n}^{(k+1)/n} (t - k/n)^2 f''(y_k) dt \right| &\leq \frac{1}{2} |f''(y_k)| \left[\frac{(t - k/n)^3}{3} \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \leq \frac{1}{6} |f''(y_k)| \times \frac{1}{n^3} \\ &\leq \frac{M}{n^3} \text{ car } M > 0 \end{aligned}$$

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} (t - k/n) f'(k/n) dt = f'(k/n) \int_{k/n}^{(k+1)/n} (t - k/n) dt = f'(k/n) \left[\frac{(t - k/n)^2}{2} \right]_{k/n}^{(k+1)/n}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2n^2} f'(k/n) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} f'(k/n) &= \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(k/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt \end{aligned}$$

→ conclusion finale : $S_n = \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$

IRubens der exo!



la melle, ça
est, ça

Voilà



ça une autre demi droite D
quelconque qui contient $O(\mathbb{R}^n)$,
et qui est différente de $\mathbb{R}^n$.

Merci!! (trop bien) le logarithme que ça

connait sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus D$ (trop bien).

→ c'est holomorphe!

Mais du coup ça n'a pas de point de branchement de $\log(z)$

pour $z \in \mathbb{C}^*$, tant que ça ne passe pas 2!

Exercices | (2)

→ || fct^o $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 m par = à sa série de Taylor

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{exple standard (pt de départ de l'hm de Borel)}$$

On peut mg fct^o $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = 0$
 $x \geq 0$, $f^{(p)}(x) = p(1/x) e^{-1/x}$

→ || $\Delta(U_n) = U_{n+1} - U_n$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$
 (1) Dct asymptotique pr H $k \in \mathbb{N}$ de $\Delta^k(n^x)$

$$\Delta(U_n) = U_{n+1} - U_n$$

$$\Delta^2(U_n) = \Delta(U_{n+1} - U_n) = \Delta(U_{n+1}) - \Delta(U_n) = U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n$$

$$\Delta^3(U_n) = U_{n+3} - 3U_{n+2} + 3U_{n+1} - U_n$$

$$\Delta^k(U_n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} U_{n+j}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \Delta^k(n^x) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \underbrace{(n+j)^x}_{n^x (1+j/n)^x} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} n^x \left(1 + x \frac{j}{n} + \frac{x(x-1)}{2} \left(\frac{j}{n} \right)^2 + o\left(\frac{j}{n}\right)^3 \right) \\ &= (-1)^k n^x \underbrace{\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \right)}_{(1-1)^k = 0} + \underbrace{\left(\frac{x}{n} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j \right)}_{\text{évalue en } x=1} + \frac{x(x-1)}{2n^2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j x^j = (1-x)^k$$

$$f'(x) = -k(1-x)^{k-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j x^{j-1} = - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j x^{j-1} = -f'(1) = 0$$

$$x f'(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j j x^j$$

$\downarrow$ $\partial/\partial x$: évalue en 1

$$f'(1) + 1 \cdot f'(1) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j j^2$$

$$\underline{k=0} : n^x \quad \underline{k=1} : n^x \times x/n = x n^{x-1}$$

$$\underline{k=2} : n^x \times \frac{x(x-1)}{2n^2} \times 2 \times 1 = x(x-1) n^{x-2}$$

Δ (high de méthode)

[2] Exercices | (3)

On conjecture que $\Delta^k(n^x) = x(x-1)\dots(x-k+1)n^{x-k} + o(n^{x-k-1})$

Par rec, $k=0,1,2$ OK.

$$\Delta^k(n^x) = x(x-1)\dots$$

$$\Delta^{k+1}(n^x) = \Delta(\Delta^k(n^x)) = \Delta(x(x-1)\dots x^{n^{x-k}}) + \Delta(\underbrace{o(n^{x-k-1})}_{v_n})$$

$$\Delta^{k+1}(n^x) = \Delta(x(x-1)\dots(x-k+1)(n+1)^{x-k} - n^{x-k}) + \Delta(o(n^{x-k-1}))$$

$$\text{der terme: } x(x-1)\dots(x-k+1)((n+1)^{x-k} - n^{x-k})$$

$$= x(x-1)\dots(x-k+1)n^{x-k} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x-k} - 1 \right]$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$= x(x-1)\dots(x-k+1)n^{x-k-1} + o(n^{x-k-1})$$

$$\Delta(v_n) = v_{n+1} - v_n = o((n+1)^{x-k-1} - n^{x-k-1}) = o(n^{x-k-1})$$

$$\rightarrow n^{x-k-1} \left[1 + \frac{x-k-1}{n} + o(1/n) - 1 \right]$$

|| (2) En déduire que si $n^x \in \mathbb{N} \forall n$ alors $x \in \mathbb{N}$

$$h = \lceil x \rceil. \quad \Delta^h = x(x-1)\dots(x-h+1)n^{x-h} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Delta^h(n^x)$ est nul à partir d'un certain ng . p .

Si $x \notin \mathbb{N}$, ...

$\rightarrow$ || $y^2, (x^2 - 2x + y)(y^2 - 2x + 1)$ a un nbre fini de valeurs entières

$$(x, y) \text{ solu} \rightarrow y = \sqrt{3x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{327}{27}} + O(1/x)$$

pour x trop gd, $O(1/x) \rightarrow$ problème pour que y soit entier

$\rightarrow$ nbre fini de x et nbre fini de y allant av

(calcul + prouver le reste intégral)

$\rightarrow$ || $P \in \mathbb{R}[X]$ de deg impair $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{O}^\infty / g$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$
 Déterminer f .

• [Exercices] (7)

$$|a_n| = \left| \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{|P(a)|}{n!}$$

$$|R_n(a)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} P^{(n+1)}(t) dt \right| \leq |P(a)| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} |P(t)| dt$$

$$\leq \sup_{[0,x]} |P(t)| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Chx plus intelligent que 0?

P de deg impair $\rightarrow$ une $\sqrt{1} \parallel \alpha$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-\alpha)^n$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)| \rightarrow 0 \quad \forall n \rightarrow \infty, \quad f^{(n)}(x) \rightarrow 0 \rightarrow f = 0$$

$\rightarrow f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, dérivable 2x sur $]0,1[$

On supp. $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$

En déduire qu'il existe $x \in]0,1[$ tq $|f''(x)| \geq 4$

Taylor - Lagrange à l'ordre 2: $\exists x \in]0,1[$ tq:

$$\underbrace{f(1)}_1 = \underbrace{f(0)}_0 + \underbrace{(1-0)}_0 f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2} f''(x) \rightarrow f''(x) = 2$$

De même, $\exists y \in]0,1[$ tq:

$$\underbrace{f(0)}_0 = \underbrace{f(1)}_1 + \underbrace{(0-1)}_0 f'(1) + \frac{(0-1)^2}{2} f''(y) \rightarrow f''(y) = -2$$

Taylor - Lagrange en 1/2:

$$\left. \begin{aligned} f(1/2) &= f(0) + (1/2-0)f'(0) + \frac{(1/2-0)^2}{2} f''(x) \\ f(1/2) &= f(1) + (1/2-1)f'(1) + \frac{(1/2-1)^2}{2} f''(y) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{8} f''(x) = -\frac{1}{8} f''(y)$$

$$\Rightarrow |f''(x)| + |f''(y)| \geq 8 \quad (\leftarrow f''(x) - f''(y) = 8 + \text{inég triang.})$$

gagné ! (7)

Soit $a > 0$. Soit $f:]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(k)}(x) \geq 0$.
 Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Plan de la preuve

- 1) Montrer que $F: x \mapsto f(x) + f(-x)$ est DESE.
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$ ou $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- 3) ——— $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(x) = f(x)$

Remarque préliminaire: Il suffit de montrer que f est DESE sur $]-b, b[\forall b \in]0, a[$.

On étend les pts de bord

En effet, les coeffs du DESE sur $]-b, b[$ ne dépendent pas de b !

! Soit $F(x) = f(x) + f(-x)$.

F est paire, de classe $C^\infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, F^{(2k+1)}(0) = 0$.
 $\forall x \in]-b, b[$

$\rightarrow$ Taylor reste-intégral $\forall x \in]0, b[$

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt \quad (*)$$

$R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ OBJECTIF
 (comparer à $R_n(b)$)

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt$$

$$= \int_0^x \underbrace{\left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{2n+1}}_{\leq 1} \times \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} F^{(2n+2)}(t) dt$$

$$\leq \left(\frac{x}{b} \right)^{2n+1} \times R_n(b) \quad \text{mais } F^{(2k)}(0) = 2f^{(k)}(0) \geq 0 \forall k$$

car $\frac{d}{dt} \left(\frac{x-t}{b-t} \right) = \frac{-b+x}{(b-t)^2} \leq 0 \Rightarrow R_n(x) \leq F(x) \forall x$

D'où $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{n+1} F(b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in [0; b[$. (218)

$\Rightarrow \forall x \in [0; b[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!} \frac{x^n}{n!} \rightarrow \text{D.E.S.E.}$

Comme F est paire, on obtient le résultat $\forall x \in]-b; b[$.

2) de même pour f , on écrit en utilisant Taylor-Reste-Intégrale:

$\forall x \in]-b; b[\quad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{x^k}{k!} + R_{2n+1}(x)$

$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t) dt$

avec $0 \leq \frac{f^{(2n+2)}(t)}{f^{(2n+2)}(0)} \leq 1$ (on sait des choses!)

$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} F^{(2n+2)}(0)$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq R_n(|x|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x) \quad \forall x \in]-b; b[$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(x) \rightarrow$ Utiliser S_{2n+1} .

$\boxed{\|S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x)\|} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2} \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Cv de la S.E. de F .

Avec le résultat précédent, on en déduit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(x) = f(x) \quad \forall x \in]-b; b[$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{x^n}{n!}$

CQFD.

Remarque / Application

• $\tan$ est D.E.S.E. Car $\tan$ satisfait les conditions précédentes $\Rightarrow f' \text{ D.E.S.E.} \Rightarrow f \text{ D.E.S.E. sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Référence: GODEFON, Analyse

METHODE DE NEWTON POUR LES RACINES

218 DVZ
4/3

Soient $\xi_1 < \dots < \xi_n$ n réels, et $m_1, \dots, m_r$ n entiers naturels non nuls. Soit P le polynôme, $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \xi_i)^{m_i}$.

On pose la suite (x_n) définie par:

$$\begin{cases} x_0 > \xi_r \\ x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \end{cases}$$

1) Montrer que x_n est strictement décroissante et converge vers ξ_r .

2) Si $m_r = 1$, montrer que:

$$\forall \epsilon > 0, \quad |x_n - \xi_r| = o(\epsilon^n).$$

Si $m_r \neq 1$, montrer que

$$\exists \epsilon > 0, \quad |x_n - \xi_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$$

1) On pose $f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$ de telle sorte que $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrons par récurrence que $x_n > \xi_r \quad \forall n$.

• $x_0 > \xi_r$ OK.

• Si $x_n > \xi_r$, si on montre que f est croissante sur $[\xi_r; +\infty[$ on aura le résultat, car $f(x_n) > f(\xi_r) = \xi_r$.

On commence donc par remarquer que f se prolonge par continuité en ξ_r en posant $f(\xi_r) = \xi_r$. f étant de classe C^1 sur $] \xi_r, +\infty[$, on peut calculer:

$$f'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} \quad \text{qui est du}$$

signe de $\frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} > 0$ sur $[\xi_r; +\infty[$ car les zéros de P' (et donc ceux de P'') sont dans $[\xi_1, \xi_r]$.

Comme on a obtenu que $x_n > \xi_r \quad \forall n$, on a alors:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} < x_n, \quad (x_n) \text{ est donc strictement décroissante}$$

Elle est de plus minorée par ξ_r donc converge vers ℓ / $f(\ell) = \ell$.

$\Leftrightarrow P(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell \in \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\}$ d'où $\ell = \xi_r$ 218
D12
2/3

impossible
car $\ell > \xi_r$

2) Idée générale:

$|x_{n+1} - \xi_r| = |f(x_n) - f(\xi_r)| \rightarrow$ ressemble à la formule de Taylor-Lagrange

• Calculons d'abord $\lim_{x \rightarrow \xi_r} f'(x)$:

On remarque d'abord que $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - \xi_i}$ (dérivée logarithmique de P)

et que du coup on a $\left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}$

$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2} = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} \times \left(\frac{P(x)}{P'(x)}\right)^2 + 1$$

$$= 1 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{(x - \xi_i)^2}\right) \times \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - \xi_i}\right)^{-2}$$

$$\underset{x \rightarrow \xi_r}{\sim} \frac{m_r}{(x - \xi_r)^2} \times \left(\frac{m_r}{x - \xi_r}\right)^{-2} = \frac{1}{m_r}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow \xi_r} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}$

• Si $m_r = 1 \Rightarrow f'(\xi_r) = 0$

Soit $c > 0$.

La formule de Taylor-Lagrange appliquée sur l'intervalle

$]\xi_r, x_n[$ nous donne, pour tout n , l'existence de

$y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = f'(y_n)(x_n - \xi_r)$

Mais $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \xi_r \Rightarrow y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \xi_r$

$\Rightarrow f'(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

puisque f' est continue en ξ_r

Donc $\exists m_0 \in \mathbb{N} / |f'(y_n)| < c \quad \forall n > m_0$

On obtient alors par récurrence que

$$|x_n - \xi_r| \leq c^{n-m_0} \times |x_{m_0} - \xi_r| = O(c^n)$$

Soit en prenant $c' < c$ que $|x_n - \xi_r| = o(c'^n) \quad \forall c' < c$ $\square$

• Maintenant si $m \neq 1$ ($m > 1$).

On a toujours:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]\xi_r, a_n[\quad z_{n+1} - \xi_r = f'(y_n)(z_n - \xi_r) \quad (*)$$

Idee :

$$\begin{cases} z_n - \xi_r \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n \\ \Leftrightarrow \ln(z_n - \xi_r) \sim n \ln\left(1 - \frac{1}{m_r}\right) \quad \text{converge} \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow v_n = \log(z_{n+1} - \xi_r) - \log(z_n - \xi_r) \quad \text{converge vers } \log f'(\xi_r) \neq 0.$$

Test général d'une suite divergente.

$\Rightarrow \sum v_n$ diverge et l'équivalence des sommes partielles donne
 $\log(z_n - \xi_r) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \log(f'(\xi_r))$ mais pas de puissance à l'exponentielle.

On montre que la suite $\log(z_n - \xi_r) - n \log(f'(\xi_r))$ converge.

On pose l'égalité de Taylor - Lagrange au second ordre.

$$\forall n, \exists y_n \in]\xi_r, a_n[\quad z_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(z_n - \xi_r) + \underbrace{\frac{f''(z_n)}{2}(z_n - \xi_r)^2}_{E_n \times (z_n - \xi_r)}.$$

$$\text{En posant } E_n = \frac{z_{n+1} - \xi_r}{f'(\xi_r)(z_n - \xi_r)} - 1$$

$E_n \rightarrow 0$

On a:

$$\begin{aligned} \log(z_{n+1} - \xi_r) - \log(z_n - \xi_r) - \log(f'(\xi_r)) &= \log(1 + E_n) \stackrel{v}{=} O(E_n) \\ &= O(z_n - \xi_r) = O(c^n) \\ &\quad \uparrow \quad \text{pour } c \text{ tel q.} \\ E_n &= \frac{f''(z_n)}{2}(z_n - \xi_r) \quad z_n - \xi_r = O(c^n) \end{aligned}$$

C'est donc le test général d'une suite

convergente : on en déduit donc que

$$\log(z_n - \xi_r) - n \log(f'(\xi_r)) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow z_n - \xi_r = \exp\left(n \log(f'(\xi_r)) + \lambda + o(1)\right) = \left(f'(\xi_r)\right)^n \times e^{\lambda + o(1)}$$

Référence: Chambert, Analyse 2.

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n \cdot e^{\lambda} \quad \text{CQFD.}$$