NOM : CHABAUD Prénom : Ulysse

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

~~Autre sujet :~~

DV

I - Théorèmes d'inversion, conséquences.

Déf 1 : Soient U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ est un C^n-difféomorphisme ssi f est C^n sur U, bijective et f^{-1} est C^n sur V.

Théorème 2 (Inversion locale) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Si $\det D_a f \neq 0$, il existe un voisinage V de a dans U et W voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V} : V \longrightarrow W$ soit un C^k-difféomorphisme.

Rmq 3 :
- $(x \in V$ et $y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in W$ et $x = f^{-1}(y))$
- $V \neq U$ a priori
- $\forall x \in V$, $D_{f(x)}(f^{-1}) = (D_x f)^{-1}$

Théorème 4 (Inversion globale) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$ injective telle que $\forall x \in U$, $\det(D_x f) \neq 0$. Alors $f(U)$ est ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exemple 5 (Polaires) : $f : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

est C^1, injective, $\det(D_{(r,\theta)} f) = r \neq 0$ donc f est un C^1 difféomorphisme sur son image.

Déf 6 : Soient U, V ouverts connexes de $\mathbb{C}$, $f : U \to V$, holomorphe bijective et f^{-1} holomorphe sur V, on dit que f est un biholomorphisme de U sur V.

Théorème 7 (Brouwer) : toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

Théorème 8 (Inversion globale holomorphe) : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe injective, alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

~~Remarque~~ pas d'hypothèse sur f'

Théorème 9 (Hadamard-Lévy) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, alors (f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ (f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\det D_x f \neq 0$)

II - Théorème des fonctions implicites.

Théorème 10 (des fonctions implicites) : Soient $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ouvert, $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k. Si $f(a,b) = 0$ et $\det D_b(t \mapsto f(a,t)) \neq 0$ alors il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et un unique $\varphi : V \longrightarrow W$ de classe C^k tels que $((x,y) \in V \times W, f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

Exemple 11 : $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 1$, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $(0,1)$ et $y = -\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $(0,-1)$.

Rmq 12 : On a une version holomorphe en remplaçant C^k par holomorphe et $\mathbb{R}^p$ par $\mathbb{C}$.

Rmq 13 : $\forall x \in V$, $D\varphi(x) = -(D_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ (D_x f(x, \varphi(x)))$

Théorème 14 (Extrema liés) : Soit $(f, g_1, \dots, g_p) \in (C^1(U, \mathbb{R}))^{p+1}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Soit $\Sigma = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1, p]\!], g_i(x) = 0\}$.

Si $f_{|\Sigma}$ admet un extremum en a et si $(D_a g_1, \dots, D_a g_p)$ est libre, alors $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, avec

$$D_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_a g_i$$

NOM : CHABAUD
Prénom : Ulysse

Rouge entourez l'épreuve Bleu
entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 214
Autre sujet : DV2

III - Applications

1.) Polynômes.

Prop 15 : Soit P_0 un polynôme, x_0 une racine simple de P_0, alors il existe U voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}_{\deg P_0}[X]$, V voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi : U \to V$, C^∞, telle que $\forall P \in U, \forall x \in V$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(P)$

Corol 16 : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$.

2.) Résultats matriciels.

Prop 17 : Soit $k \geq 1$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est assez proche de I_n, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^k$. De plus, $\varphi : A \mapsto B$ est C^∞ sur un voisinage de I_n.

Def 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, L'exponentielle de A est la somme de la série normalement convergente $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$.
On définit de même e^A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Prop 19 : "exp" réalise un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 20 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Prop 21 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits, i.e. il existe V voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que l'unique sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ inclus dans V soit $\{I_n\}$

3) Géométrie différentielle.

Via le théorème (Extremalités), on peut appliquer la méthode du multiplicateur de Lagrange pour minimiser une fonction donnée.

Exemple 22 (Chaînette) : On cherche à minimiser le potentiel
$$\phi : x \longmapsto \int_{-t_0}^{t_0} \alpha x(t) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$
avec la contrainte de longueur
$$\psi(x) = \int_{-t_0}^{t_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt - l_0 = 0,$$
on cherche x_0 telle que $\phi(x_0) = \min_{x \in G} \phi(x)$ avec $G = \{x \in C^1([-t_0, t_0], \mathbb{R}) \mid \psi(x) = 0\}$

$\operatorname{grad} \phi(x) - \lambda \operatorname{grad} \psi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha x - \lambda}{\sqrt{1 + (\frac{dx}{dt})^2}}\right) = 0$

soit $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, $\alpha x - \lambda = \mu \sqrt{1 + (\frac{dx}{dt})^2}$
équation différentielle dont la résolution est la chaînette.

IV - Sous-variétés.

Def 23 : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \leq n$, on dit que V est lisse en a de dimension d ssi $\exists F : U \to F(U)$ un C^1 difféomorphisme avec U voisinage de a, $F(U)$ voisinage de 0 tels que $F(V \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}) \cap F(U)$.

Def 24 : V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall a \in V$, V est lisse de dimension d en a.

Exemple 25. S^n est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$
- La courbe $y = |x|$ n'est pas lisse en $(0,0)$.
- La surface $x^2 + y^2 = z^2$ n'est pas lisse en $(0,0,0)$

Rmq 26 : L'image d'une sous-variété de dimension d par un C^1-difféomorphisme est une sous-variété de dimension d.

214

NOM : CHABAUD **Prénom** : Ulysse

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 214

Autre sujet :

Prop 27 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f_1, \dots, f_p : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $V = \{x \in U \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x) = 0\}$. Si $\forall x \in U$, $(D_x f_1, \dots, D_x f_p)$ sont indépendantes, V est une sous-variété de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 28 (des sous-variétés) : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \in \mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) V est lisse en a de dimension d.

(ii) $\exists U$ voisinage de a et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$, C^1, telles que $x \in V \cap U \Leftrightarrow x \in U$ et $\forall i$, $f_i(x) = 0$ et $(D_a f_1, \dots, D_a f_{n-d})$ sont indépendantes.

(iii) $\exists U$ voisinage de a, Ω voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et n fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, telles que $\varphi : (u_1, \dots, u_d) \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$ avec $a = \varphi(0)$ et $D_0\varphi$ injective de rang d

(iv) $\exists U$ voisinage de a, U' voisinage de $(a_1, \dots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fonctions $g_i : U' \to \mathbb{R}$, C^1, telles que
$$x \in V \cap U \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_d) \in U' \text{ et } \forall i,\ x_{d+i} = g_i(x_1, \dots, x_d)$$

Rmq 29 : (ii) $\Rightarrow$ (iv) provient du théorème des fonctions implicites.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) provient du théorème d'inversion locale.

Déf 30 : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$. $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à V en a ~~si~~ $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable sur I avec $0 \in I$, $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Théorème 31 (Espace tangent) : Si V est lisse en a de dimension d, ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d appelé espace tangent à V en a et noté T_aV

Prop 32 : • Si V est de la forme (ii), $T_aV = \operatorname{Ker} D_a f$ où $f = (f_1, \dots, f_{n-d})$

• Si V est de la forme (iii), $T_aV = \operatorname{Im} D_0\varphi$ où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

• Si V est de la forme (iv), T_aV est le graphe de $D_{(a_1, \dots, a_d)} g$ où $g = (g_1, \dots, g_{n-d})$

Rmq 33 : Le théorème des extrema liés assure que $T_a G = \bigcap \ker D_a g_i \subset \ker D_a f$, autrement dit, G est une sous-variété et $D_a f_{|T_a G} = 0$

Exemple 34 : $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, c'est une sous-variété de dimension n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple 35 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_{I_n} SL_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr})$

Exemple 36 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n^2 - n}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_{I_n} O_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques)

3/3