213*

NOM : VOGIN **Prénom :** Lambert **Jury :**

~~Algèbre~~ Entourez l'épreuve **Analyse**

Sujet choisi : 213 : Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes. Exemples d'applications.

~~Autre sujet :~~ Références : • Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
• Tisseron, Topologie, Espaces fonctionnels
• Beck, Objectif Agrégation

⚠ c'est ne pas écrire trop petit !!

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Espaces préhilbertiens

1) Premières définitions et propriétés

Déf 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On appelle produit scalaire sur E toute application $(\cdot|\cdot) : E\times E \to \mathbb{K}$ telle que :

- $\forall y\in E$, $\begin{array}{l} E\to\mathbb{K} \\ x\mapsto (x|y)\end{array}$ est linéaire
- $\forall x,y\in E$, $(y|x) = \begin{cases} (x|y) & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ (symétrie)} \\ \overline{(x|y)} & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C} \text{ (antisymétrie)}\end{cases}$
- $\forall x\in E$, $(x|x)\in\mathbb{R}_+$
- $\forall x\in E$, $(x|x)=0 \iff x=0$

Déf 2 : Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien

Prop 3 : $\forall x\in E$, $\begin{array}{l} E\to\mathbb{K} \\ y\mapsto (x|y)\end{array}$ est $\begin{cases}\text{linéaire si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \\ \text{antilinéaire si } \mathbb{K}=\mathbb{C}\end{cases}$

Ex 4 : a) Si $E=\mathbb{R}^d$, et $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}_+^*$, alors $(x|y) := \sum_{i=1}^d a_i x_i y_i$ est un produit scalaire sur E.
Si $E=\mathbb{C}^d$ et $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R}_+^*$, alors $(x|y) := \sum_{i=1}^d a_i x_i \overline{y_i}$ est un produit scalaire sur E.
Si de plus, $a_1=\dots=a_d=1$, $(E,(\cdot|\cdot))$ est appelé espace euclidien canonique de dimension d, ou espace hermitien canonique de dimension d

b) $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}),(\cdot|\cdot))$ où $(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

c) Posons $\mathcal{C}_T^{\mathbb{K}} = \{f : \mathbb{R}\to\mathbb{K},\ f \text{ continue, } T\text{-périodique}\}$.
et $(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

d) Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ mesuré, $L^2(\Omega) := \{f : \Omega\to\mathbb{C}, \int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty\}/\sim$
où $f\sim g \iff \mu(\{x\in\Omega,\ f(x)\neq g(x)\})=0$, et $(f|g)=\int_\Omega f\bar{g}\,d\mu$.

e) Si I ensemble, $\ell^2_{\mathbb{K}}(I) := \{(x_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I, \sum_{i\in I}|x_i|^2<\infty\}$
avec $((x_i)_{i\in I}|(y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}$.

Prop 5 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall x,y\in E$, où $(E,(\cdot|\cdot))$ est un préhilbertien,
$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$.

Corollaire 6 : $\|\cdot\|$ $\begin{array}{l} E\to\mathbb{R}_+ \\ x\mapsto\sqrt{(x|x)}\end{array}$ est une norme sur E.

Ex 7 : a) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}$
b) $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}$

Prop 8 : La donnée de $\|\cdot\|$ permet de retrouver $(\cdot|\cdot)$: $\forall x,y\in E$,
$\cdot\ \mathrm{Re}(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$
$\cdot\ \mathrm{Im}(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$.

Corollaire 9 : (de Cauchy-Schwarz)
$\begin{array}{l} E\to E' \\ y\mapsto \varphi_y : x\mapsto (x|y)\end{array}$ est une isométrie (anti)linéaire

Prop 10 : (Cas d'égalité)
$\forall x,y\in E$, $|(x|y)|^2=\|x\|\,\|y\| \iff x,y$ liés.

Prop 11 : (Identité du parallélogramme)
$\forall x,y\in E$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$.
→ cond. suff pr être pré-hilbertien.

2) Orthogonalité

Déf 12 : Soient $x,y\in E$. x est dit orthogonal à y si $(x|y)=0$.
On le note $x\perp y$.

Ex 13 : a) $d=2$: $(0,1)\perp(1,0)$.

Déf 14 : Soit $A\subset E$. $A^\perp = \{x\in E \text{ tq } \forall y\in A,\ x\perp y\}$ est l'orthogonal de A.
On a, de manière équivalente : $A^\perp = \bigcap_{y\in A}\operatorname{Ker}\varphi_y$.

Prop 15 : $\cdot\ A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
$\cdot\ x\in A^\perp \iff A\subset\operatorname{Ker}\varphi_x \iff \overline{\mathrm{Vect}\,A}\subset\operatorname{Ker}\varphi_x$.
$\cdot\ A^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}\,A})^\perp$

Trop de choses ? Trop d'appli ? Mettre un dvt de la base hilbertienne.

Ex 16 : a) $d=3$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}^{\perp} = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$.

b) $\{x \mapsto 1\}^{\perp} = \{f \in E, \int f = 0\}$.

Déf 17 : $(e_1, \dots, e_n)$, une famille de vecteurs de E, est dite ~~famille orthogonale~~ si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j)=0$.
Si de plus, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i|e_i)=1$, $(e_1, \dots, e_n)$ est dite orthonormale.

Prop 18 : (Théorème de Pythagore)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ famille orthogonale de E.
On a $\|\sum_{i=1}^{n} e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$.

II) Espaces de Hilbert

1) Définition, premiers exemples

Déf 19 : $(H, (\cdot|\cdot))$ un préhilbertien est dit espace de Hilbert s'il est complet pour $\|\cdot\|$.

Ex 20 : • Les préhilbertiens de dimension finie sont des espaces de Hilbert.
• Si $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty\}$, $(u|v) := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$
alors $(\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}), (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert.

C-ex 21 : Si $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0\}$ et $(u|v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$ (bien défini car la somme est finie),
on a E non complet pour $\|\cdot\|$, donc $(E, (\cdot|\cdot))$ non Hilbert.

2) Théorème de projection

Prop 22 : (Théorème de projection)
Soit H un espace de Hilbert. Soit $C \subset H$, convexe, fermé, non vide.
Alors $\forall x \in H$, $\exists! \, y \in C$ tq $\|x-y\| = d(x,C) := \inf_{z\in C} \|x-z\|$.
On note ce $y \in C$ $y = p_C(x)$.
De plus, $\forall x \in H$, $y = p_C(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in C \\ \forall z \in C, \ \mathrm{Re}((x-y|z-y)) \leq 0 \end{cases}$

Corollaire 23 : $p_C : H \to C$ est contractante et donc continue.

Prop 24 : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.
Alors $p_F : H \to F$ est linéaire.
De plus, $\forall x \in H$, $y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$

Corollaire 25 : Pour tout F sev fermé de H, $H = F \oplus F^{\perp}$,
et p_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
p_F est alors appelé projection orthogonale sur F.

Corollaire 26 : $\forall F$ sev de H, $\overline{F} \oplus F^{\perp} = H$.

Corollaire 27 : $\forall F$ sev de H, $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$.

Ex 28 : Soit $\varphi \in H'$. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ sev fermé de H, donc $H = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\perp}$.

Cor : F sev. F dense $\Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$

3) Théorème de représentation de Riesz, adjoint

Prop 29 : (Théorème de représentation de Riesz)
Soit H un espace de Hilbert.
$H \to H'$, $y \mapsto \phi_y : \{ x \mapsto (x|y) \}$ ($H \to \mathbb{K}$) est une isométrie surjective.
Autrement dit, $\forall \phi \in H'$, $\exists! \, y \in H$ tq $\forall x \in H$, $\phi(x) = (x|y)$

Corollaire 30 : $\forall T \in \mathcal{L}(H)$, $\exists! \, T^* \in \mathcal{L}(H)$ tq
$\forall x,y \in H$, $(Tx|y) = (x|T^*y)$.
T^* est l'adjoint de T
De plus, $\|T^*\| = \|T\|$, et donc $\mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, $T \mapsto T^*$ est une isométrie involutive (anti)linéaire.

Appl 31 : Si $H = \mathbb{K}^d$ muni de la structure euclidienne / hermitienne canonique, $\mathcal{L}(H) \simeq \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, et $T^* = {}^t\overline{T}$.

Prop 32 : $\forall T \in \mathcal{L}(H)$, $\|TT^*\| = \|T\|^2$

Déf 33 : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. T est dit autoadjoint si $T^* = T$.

Ex 34 : • $\forall T \in \mathcal{L}(H)$, T^*T et TT^* sont autoadjoints
• Les projections orthogonales sont autoadjointes.

Prop 35 : Si H est un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$, alors $\forall T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint, $\|T\| = \sup_{x\in H, \|x\|=1} |(Tx|x)|$.

Appl 36 : Si $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M$, alors, si $\forall X \in \mathbb{R}^d$, ${}^tXMX \geq 0$,
$\max\{\lambda, \lambda$ valeur propre de $M\} = \sup_{X\in\mathbb{R}^d, \|X\|=1} {}^tXMX$

4) Application : optimisation

Déf 37 : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) converge faiblement vers $x \in H$ si $\forall y \in E$, $(x_n|y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x|y)$

Prop 38 : La convergence (en norme) implique la convergence faible

Prop 39 : De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Appl 40 : (Optimisation)
Soit H un espace de Hilbert réel.
Soit $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue, tq $J(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$
$\exists x \in H$, $J(x) = \inf_H J$

Développement n°1

5) Application : équations aux dérivées partielles

Déf 41 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On pose :
• $H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega), \forall i \in [\![1,d]\!], \exists v_i \in L^2(\Omega)$ tq $v_i = \partial_i u$ au sens faible$\}$
• $\|\cdot\|_{H^1}$: $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega |\partial_i u|^2}$
• $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$
• $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour $\|\cdot\|_{H^1}$.

Prop 42 : $H^1_0(\Omega)$ est un Hilbert pour $(u|v) = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_i u \, \partial_i v$.

Prop 43 : (Théorème de Lax-Milgram) ← trouver une autre appli ?
Soit H un Hilbert réel, soit a forme bilinéaire sur H tq
$\begin{cases} \exists M > 0, \forall u,v \in H, |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\| \text{ (continue)} \\ \exists \nu > 0, \forall u \in H, a(u,u) \geq \nu \|u\|^2 \text{ (coercive)} \end{cases}$
Soit $\ell : H \to \mathbb{R}$ linéaire continue.
Alors $\exists! \, u \in H$ tq $\forall v \in H$, $\ell(v) = a(u,v)$.

Appl 44 : Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord régulier.
Soient $b_0, \nu \in \mathbb{R}_+^*$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $\forall (i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, tq
$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_i \xi_i^2$ $\forall (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$.
et soit $f \in L^2(\Omega)$.
Le problème (E) admet une unique solution au sens des distributions dans $H^1_0(\Omega)$, où :
(E) : $b_0 u - \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) = f$.

police ? record ?
moyen

Développement n°2

III) Bases hilbertiennes

1) Définition, caractérisations

Prop 45 : Sur un préhilbertien E, une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.

Déf 46 : $(e_i)_{i\in I}$, une famille de E, est dite base hilbertienne de E si elle est :
- orthogonale (ie $(e_i|e_j)=0 \ \forall i\neq j$)
- normée (ie $(e_i|e_i)=1 \ \forall i$)
- totale (ie $\overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})} = H$)

Prop 47 : En dimension finie, $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si c'est une base (algébrique) orthonormée.

Ex 48 : $E=\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \sum |u_n|^2<\infty\}$.
$(u,v) := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\overline{v_n}$.
$e_i^{(n)} := \begin{cases} 1 & \text{si } i=n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \forall n,i\in\mathbb{N}$.
$(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E.

Prop 49 : Soit $(e_j)_{j\in J}$ famille orthonormée finie de E, soit $F=\mathrm{Vect}((e_j)_{j\in J})$.
$\forall x\in E, \begin{cases} p_F(x) = \sum_{j\in J}(x|e_j)e_j \\ \|x\|^2 = \|x-\sum_{j\in J}(x|e_j)e_j\|^2 + \sum_{j\in J}|(x|e_j)|^2 \end{cases}$

Prop 50 : (Lemme de sommabilité)
Soit I un ensemble quelconque, soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de ses parties finies.
Soit $(a_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}_+)^I$.
$(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow \{\sum_{j\in J} a_j,\ J\in\mathcal{F}(I)\}$ majoré.
Dans ces conditions, $\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \sum_{j\in J} a_j$.

Prop 51 : (Inégalité de Bessel)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ famille orthonormale de E.
$\forall x\in E, \sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.

Prop 52 : (Théorème de Bessel-Parseval)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ famille orthonormale de E.
On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) où :
(i) : $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E
(ii) : $\forall x\in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2$ (égalité de Bessel)
(iii) : $\forall x,y\in E$, $(x|y) = \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i|y)$.

Prop 53 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne de E
$\forall x\in E$, $x = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i$.

2) Application : Séries de Fourier

Appl 54 : (Cf Ex 4.c))
Posons $e_n : x\longmapsto e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \ \forall n\in\mathbb{Z}$.
- $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_T^{\mathbb{C}}$
- $\{x\mapsto 1\}\cup\{x\mapsto\sqrt{2}\cos\frac{2\pi nx}{T}, n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{x\mapsto\sqrt{2}\sin\frac{2\pi nx}{T}, n\in\mathbb{N}^*\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_T^{\mathbb{R}}$.

Appl 55 : $E=\mathcal{C}_{2\pi}^{\mathbb{C}}$. $c_n(f) := (f|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$
On a :
- $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx$
- $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ (au sens de la sommabilité dans $(\mathcal{C}_{2\pi}^{\mathbb{C}}, (.|.))$)

Prop 56 : Si $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne de E,
$\imath : E \longrightarrow \ell^2(I)$, $x\longmapsto((x|e_i))_{i\in I}$ est une isométrie linéaire.
De plus $\imath$ surjective $\Leftrightarrow E$ espace de Hilbert.

Appl 57 : $\mathcal{C}_{2\pi}^{\mathbb{C}}$ n'est pas complet, ie il existe des él. de $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui ne sont pas des coefficients de Fourier.

⚠ fonc° C^0-periodique pas intér.
vrai cadre : L^2

3) Procédé d'orthonormalisation

Prop 58 : (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $N\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$, soit $(f_n)_{0\leq n<N}$ une famille libre de E.
Il existe $(e_n)_{0\leq n<N}$ famille orthonormale de E, telle que $\forall k<N$, $\mathrm{Vect}((e_n)_{0\leq n\leq k}) = \mathrm{Vect}((f_n)_{0\leq n\leq k})$.
On peut de plus construire les (e_i) par récurrence :
- $e_0 = \frac{1}{\|f_0\|}f_0$
- $\forall n<N-1$, $e'_{n+1} = f_{n+1} - p_{\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)}(f_{n+1})$ et $e_{n+1} = \frac{1}{\|e'_{n+1}\|}e'_{n+1}$.

Appl 59 : Calcul de $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_{-1}^1 (t^3-(at^2+bt+c))^2\,dt$.

Corollaire 60 : $(E,\|\cdot\|)$ est séparable si, et seulement si, il admet une base hilbertienne dénombrable.

Corollaire 61 : Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On a :
H séparable $\Leftrightarrow H$ isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.

(Questions plur.)

- ~~prop5~~ (Cauchy-Schwarz). Preuve ?
  - ↳ • Cas réel. $(x+\lambda y | x+\lambda y) = (x|x) + 2\lambda (x|y) + \lambda^2 (y|y) \geq 0.$
    Trinome qui ne change pas de signe → $\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0.$
  - à revoir → • Cas complexe. $(x+\lambda y | x+\lambda y) = (x|x) + \bar{\lambda}(x|y) + \lambda\overline{(x|y)} + |\lambda|^2 (y|y)$
    On prend $\lambda \in \mathbb{R}$. $(x|x) + 2\lambda \mathrm{Re}(x|y) + \lambda^2 (y|y)$
    $\mathrm{Re}(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$
    Mettre sous forme exp le λ.

- prop 22 (thm de projection). Idée de la preuve ?
  - ↳ • Unicité : $y, z \in C$, $\|x-y\| = \|x-z\| = \inf_{u \in C} \|x-u\|$ ← à revoir
    $\forall t$, $ty + (1-t)z \in C$.
    $\|x - (ty + (1-t)z)\| = \|tx - ty + (1-t)x - (1-t)z\| \leq t\|x-y\| + (1-t)\|x-z\|$.
    (Faire intervenir le cas d'égalité... positivement liés...)
  - • Exce. ...

- Appl. 59

- Prop 53. Pquoi ça cvge ?