

NOM : UMBER

Prénom : Pierre

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → (Analyse)

Sujet choisi : 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Autre sujet :

I) Approximation par des polynômes

1) Soit f une fonction définie sur un compact $K \subset \mathbb{R}$.

Def 1: Soit f une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}$, on pose $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Prop. 2: Soit $f \in C(K)$, on pose $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Lemme 3: On pose $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$.

de fonctions de $C(K)$ on pose $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Ch 4 (Stone-Weierstrass): Soit $A \subset C(K)$ une sous- K -algèbre unifiée qui sépare les points, stable par conjugaison si $K = \mathbb{C}$. Alors $\overline{A} = C(K)$.

Ex 5: Soit $f \in C(K)$, on pose $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in K} |f(x)|$.

uniformément par des fonctions polynomiales.

2) Les polynômes de Bernstein

DEV 1: Soit $f \in C([0, 1])$. On pose $B_{m,f}(x) := \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right)$.

alors $(B_{m,f})$ converge uniformément vers f .

3) Polynôme de meilleure approximation

Def 5: Soit f continue sur K points de K si f est bornée sur K et s'il existe $x_1, \dots, x_k$ dans K tels que $\|f - p\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, k} |f(x_i) - p(x_i)|$.

Def 7: On pose $\mathcal{P}_m(I) := \{f; I \rightarrow \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{R}[X], f = p|_I\}$.

Ch 8: Soit $f \in C(\mathbb{R})$. Alors: $\mathcal{P}_m(I) \subset \mathcal{P}_m(I)$.

De plus, q_m est l'unique polynôme $p \in \mathcal{P}_m$ tel que q_m est dit polynôme de meilleure approximation de f si l'ordre m .

Prop. 9: Soit $f \in C(\mathbb{R})$ et (q_m) la suite de meilleure approximation de f , alors (q_m) converge uniformément vers f .

Ex 10: on a $q_0 = \frac{1}{2}(\min f + \max f)$.

4) Les polynômes de Tchebychev

On suppose ici $I = [-1, 1]$.

Def 11: on appelle polynômes de Tchebychev les polynômes définis par $T_0 = 1, T_1 = X, T_{m+2} = 2XT_{m+1} - T_m$.

Ch 12: T_m est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que: $\forall x \in \mathbb{R}, T_m(\cos(x)) = \cos(mx)$.

Prop. 13: T_m a m racines distinctes, qui sont $x_k := \cos\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{k\pi}{m}\right), 0 \leq k \leq m-1$.

Prop. 14: on suppose $m \geq 1$. Alors: $\forall x \in \mathbb{R}, |T_m(x)| \leq 1$ et $|T_m(x)| = 1$ admet $m+1$ solutions, qui sont $x_k := \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), 0 \leq k \leq m$, dits points de Tchebychev. En particulier, T_m est équivalente sur $[-1, 1]$ en $m+1$ points, donc $x_0, \dots, x_m$ est le polynôme de meilleure approximation.

J'ordre $m-1$ de x^m sur $[-1, 1]$

5) Autres approximations polynômiales

Def 16: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe D^m , on pose $T_m(f)(h) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$

Th 17 (Taylor-Young): on suppose $f^{(m)}(a)$ existe.

alors $f(a+h) = T_m(f)(h) + o(h^m)$

Th 18 (Inégalité de Taylor-Lagrange): On suppose $f \in C^m$ sur $[a, b]$, D^{m+1} sur $]a, b[$ et $f^{(m+1)}$ majoré par M

$$\text{alors } |f(b) - T_m(f)(b-a)| \leq M \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

II. Polynômes orthogonaux

Def 19: Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable. R est une fonction poids si: $\forall m, \int_I |x|^m \varphi(x) dx < \infty$. Si φ est une fonction poids, on note $L^2(I, \varphi) := L^2(I, \mathbb{R}, \varphi(x) dx)$. On a $\mathcal{P}_m(I) \subset L^2(I, \varphi)$

Prop 20: Il existe une unique suite (P_m) de polynômes unitaires orthogonaux tels que $\deg P_m = m$ dans $L^2(I, \varphi)$.

Rem 21: Si $\varphi \in L^2(I, \varphi)$, $\pi_m := \sum_{k=0}^m \frac{\langle \varphi, P_k \rangle_{L^2(I, \varphi)}}{\|P_k\|_{L^2(I, \varphi)}^2}$ est le

projeté orthogonal de φ sur $\mathcal{P}_m(I)$, dit polynôme de meilleure approximation quadratique de φ à l'ordre m .

Ex 22: • Si $I = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $P_m(x) = \frac{(-1)^m}{2^m} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)}$

• Si $I =]-1, 1[$ et $\varphi(x) = 1$, $P_m(x) = \frac{1}{(2m)!} (x^2 - 1)^{(m)}$ (Legendre)

• Si $I =]-1, 1[$ et $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $P_m(x) = 2^{1-m} T_m(x)$

Prop 23: P_m a m zéros distincts dans I

Prop 24: Si $m \geq 2$, $P_m = (x + \lambda_m) P_{m-1} - \mu_m P_{m-2}$ où $\lambda_m := \frac{\langle x P_{m-1}, P_{m-2} \rangle_{L^2(I, \varphi)}}{\|P_{m-1}\|_{L^2(I, \varphi)}^2}$ et $\mu_m := \frac{\|P_{m-1}\|_{L^2(I, \varphi)}^2}{\|P_{m-2}\|_{L^2(I, \varphi)}^2}$

Prop 25: Si I est borné, alors $\left(\frac{P_m}{\|P_m\|_{L^2(I, \varphi)}}\right)$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \varphi)$

DEV 2: On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \varphi(x) dx < \infty$ alors (P_m) est une base hilbertienne de $L^2(I, \varphi)$.

III. Approximation par des polynômes trigonométriques

Soit $T > 0$, on pose $\omega := \frac{2\pi}{T}$

1) L'espace $\mathcal{E}_T$

Def 26: Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. f est T -périodique si: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ on pose alors $\mathcal{E}_T := \{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), f \text{ est } T\text{-périodique}\}$

Prop 27: $\mathcal{E}_T$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

Def 28: On pose $\varphi_m: t \mapsto e^{im\omega t}$ et $\mathcal{P}_T := \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_m)$, l'ensemble des polynômes trigonométriques

Prop 29: $\overline{\mathcal{P}_T} = \mathcal{E}_T$

2) L'espace L_T^p , $p \in [1, +\infty[$

Def 30: On pose $L_T^p := L^p([0, T], \mathbb{C}, \frac{1}{T} dx)$

Prop 31: $\mathcal{E}_T \subset L_T^1([0, T])$ est dense dans L_T^1

3) Approximation et série de Fourier

Def 32: Soit $f \in L_T^1$, on pose $c_m(f) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-im\omega x} dx$: coefficient de Fourier de f

$\sigma_n(f) := \sum_{k=0}^n c_k(f) \varphi_k$: somme de Fourier partielle associée à f

$\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k(f)$: somme de Fejér associée à f

Th 33 (Fejér): • Si $f \in L_T^1$, $\sigma_n(f) \xrightarrow{L_T^1} f$

• Si $f \in \mathcal{E}_T$, $\sigma_n(f) \rightarrow f$ uniformément

DEV 2

Kien avec cours
I.2

Cor 34: $(\varphi_n)_n \in \mathbb{Z}$ est une base Hilbertienne de L^2_T

Lemme 35 (Riemann-Lebesgue): si $f \in L^1_T$, $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \varphi_n(f) = 0$

Th 36 (convergence normale): si $f \in \mathcal{E}_T, \mathcal{E}_m$, alors $\sum_n \varphi_n(f)$ converge normalement vers f

Th 37 (convergence simple de Dirichlet): si $f \in L^1_T$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dérivable à gauche et à droite de x_0 , alors $\sum_n \varphi_n(f)(x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$.

Prop 38 (phénomène de Gibbs): On pose $G_N(t) := \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nt)}{n}$

alors G_N converge simplement sur $]0; 2\pi[$ vers $t \mapsto \frac{\pi-t}{2}$ mais $\liminf_N \|G_N\|_\infty \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{2}$

V Interpolation polynomiale

Calcul pratique

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x_0, \dots, x_m \in [a, b]$ $m+1$ points distincts
Def 39: On pose $I_m: \mathbb{R}_m[X] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_m))$$

Prop 40: I_m est un $\mathbb{R}$ -isomorphisme. Plus précisément, pour $0 \leq k \leq m$, on pose $L_k := \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$ polynômes de

Lagrange, alors $I_m^{-1}((y_0, \dots, y_m)) = \sum_{k=0}^m y_k L_k$

Def 41: On pose $P_m := I_m^{-1}((f(x_0), \dots, f(x_m)))$: m -ième polynôme d'interpolation de f sur $x_0, \dots, x_m$

Prop 42 (formule d'erreur): on suppose $f \in \mathcal{C}^{m+2}$ sur $[a, b]$ alors $\|f - P_m\|_\infty \leq \frac{\|f^{(m+2)}\|_\infty}{(m+2)!} \|p_{m+2}\|_\infty$ où $p_{m+2} = \prod_{i=0}^{m+2} (x - x_i)$
erreur d'interpolation

Ainsi, tout revient à minimiser $\|p_{m+2}\|_\infty$.

Prop 43: $\|p_{m+2}\|_\infty \leq (b-a)^{m+2}$

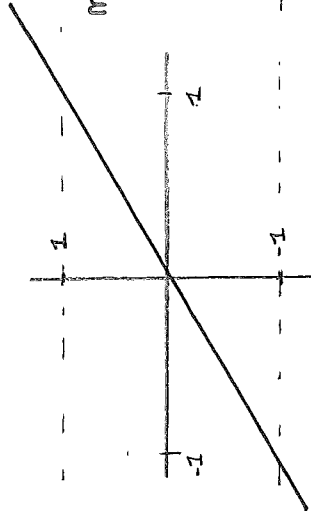
En général, on cherche $\|p_{m+2}\|_\infty = O\left(\left(\frac{b-a}{\lambda}\right)^{m+2}\right)$, avec λ le plus grand possible.

Prop 44: on suppose $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \omega\left(\frac{2k+1}{2m+2} \pi\right)$ (points d'interpolation de Chebyshev)
alors, pour ces points, on a $\|p_{m+2}\|_\infty = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+2}$

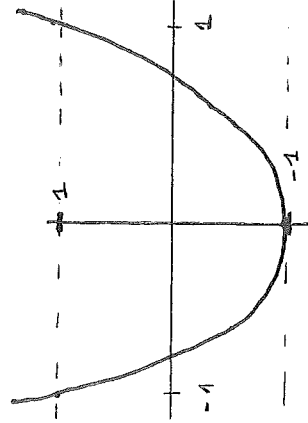
Prop 45: si $x_k = a + k \frac{b-a}{m}$ (points équidistants),
alors $\|p_{m+2}\|_\infty = O\left(e \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{b-a}{e}\right)^{m+2}\right)$

Rem 46 (Phénomène de Runge): comme le phénomène de Gibbs, il peut y avoir convergence simple de (P_m) vers f sans qu'il y ait convergence uniforme. On parle de Phénomène de Runge.

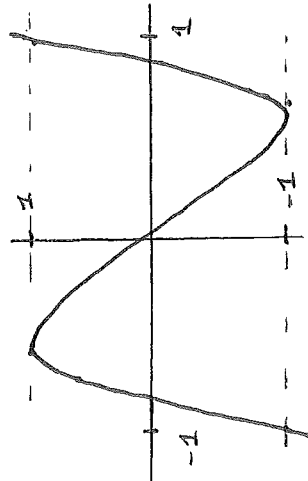
① Polynômes de Tchebychev



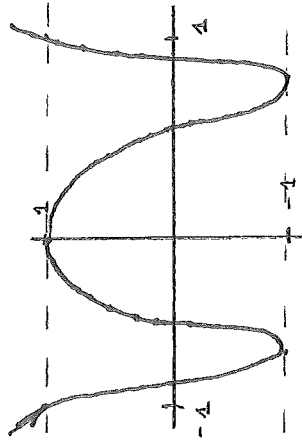
$m=1$



$m=2$

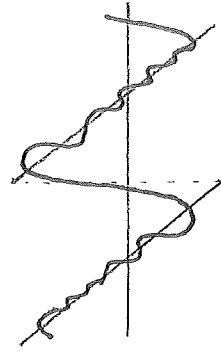


$m=3$

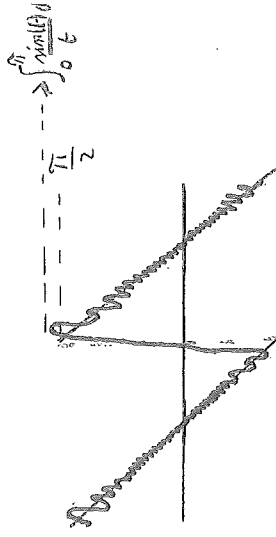


$m=4$

② Phénomène de Gibbs



$\Rightarrow$



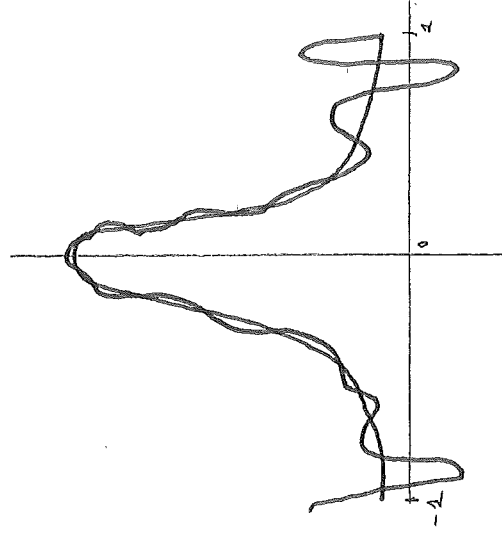
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

$\frac{\pi}{2}$

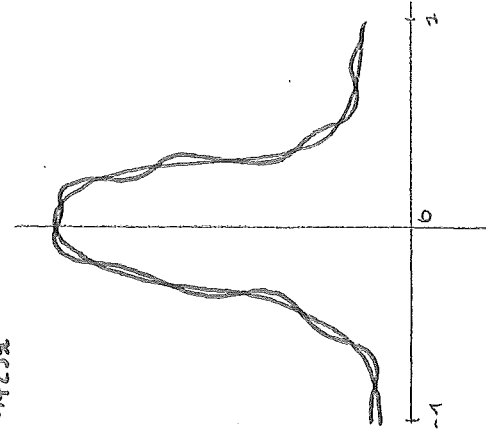
③ Phénomène de Runge

$$\text{Soit } f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{4+25x^2}$$



points équi-distantes



points de Chebyshev

12 min

Théorème de Weierstrass via les polynômes

= Polynômes de Bernstein

□ Théorème: Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, $m \in \mathbb{N}^*$

On pose $B_m(x) := \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$: m -ème polynôme de Bernstein

Alors (B_m) converge uniformément sur $[0, 1]$

démonstration: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de proba, $x \in [0, 1]$.

Soit $(X_k^{(x)})$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, $X_k^{(x)} \sim \mathcal{B}(x)$.

On pose $S_m^{(x)} := \sum_{k=1}^m X_k^{(x)}$. Par indépendance, $S_m^{(x)} \sim \text{Bin}(m, x)$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right)\right] &= \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \mathbb{P}\left(\frac{S_m^{(x)}}{m} = \frac{k}{m}\right) \\ &= \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) x^k (1-x)^{m-k} \\ &= B_m(x) \end{aligned}$$

Comme f est $\mathcal{C}^0$ sur le compact $[0, 1]$, f est $\mathcal{C}^u$ sur $[0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ un module de continuité de f associé.

$$|B_m(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right)\right] - f(x) \right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\chi_{\left\{\left|\frac{S_m^{(x)}}{m} - x\right| \leq \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right) - f(x) \right| \right]$$

$$+ \mathbb{E}\left[\chi_{\left\{\left|\frac{S_m^{(x)}}{m} - x\right| > \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right) - f(x) \right| \right]$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m^{(x)}}{m} - x\right| > \eta\right)$$

$$= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m^{(x)}}{m} - \mathbb{E}\left[\frac{S_m^{(x)}}{m}\right]\right| > \eta\right) \quad \left(\text{car } \mathbb{E}\left[\frac{S_m^{(x)}}{m}\right] = x\right)$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\text{Var}\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right)}{\eta^2} \quad \text{par Bernoulli-Tchebychev}$$

$$= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{m\eta^2} \quad \left(\text{car } \text{Var}\left(\frac{S_m^{(x)}}{m}\right) = \frac{x(1-x)}{m}\right)$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{2m\eta^2} \quad \text{car } x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

donc $\limsup_n \|B_n - f\|_\infty < \varepsilon$, d'où le résultat.

Leçon : 202: ensemble de parties denses

[203: compacité

209: approximation polynomiale

249: variables de Bernoulli

[262: espérances, variance

264: variables discrètes

(+262: modes de convergence)
de v.a.

* Remarque: on a un résultat de convergence simple via la loi des grands nombres

In effet: Comme $(X_k^{(n)})$ sont des v.a. i.i.d., dans L^1 , on

$$\frac{S_m^{(n)}}{m} \xrightarrow[p.p.]{} E[X_1^{(n)}] = \alpha$$

donc, comme f est C^0 , $f\left(\frac{S_m^{(n)}}{m}\right) \rightarrow f(\alpha)$ p.p.

donc, par convergence dominée, $B_n(\alpha) = E\left[f\left(\frac{S_m^{(n)}}{m}\right)\right] \rightarrow f(\alpha)$

Remarque: Si f est B_q , on peut préciser la majoration:

$$r_n = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\rightarrow K \varepsilon + \frac{L^2 \|f\|_\infty}{2 \varepsilon^q n}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

Base Hilbertienne de polynômes

proposition: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable
 Soit $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$

On note (P_n) la famille orthonormale associée à ρ
 alors (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

démonstration: Comme $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert,
 (P_n) est une base hilbertienne si et seulement si $F^\perp = \{0\}$
 où $F := \text{Vect } P_n = \text{Vect } \{x \in I \mapsto x^n\}$. Soit $f \in F^\perp$.

Comme $f \in L^2(I, \rho)$, $\int_I |f|^2 \rho < \infty$

Par ailleurs, $|f\rho| = (|f|^{1/2})(|f|^{1/2}\rho)$
 $\in L^2(I) \in L^2(I)$

donc $f\rho \in L^1(I)$, et si l'on pose $\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_I(x) \rho(x) f(x)$,
 on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée
 de Fourier $\hat{\varphi}: \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

On pose $\Omega_a := \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im } z| < \frac{a}{2}\}$ ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

On prolonge $\hat{\varphi}$ en $\psi: \Omega_a \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Montrons que ψ est bien définie et holomorphe sur Ω_a :

On pose $g: \Omega_a \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(z, x) \mapsto e^{-izx} \varphi(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(\cdot, x)$ est holomorphe

$\forall z \in \Omega_a$, $g(z, \cdot)$ est mesurable

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega_a, \forall x \in \mathbb{R}, |g(z, x)| &\leq e^{|\text{Im } z| |x|} |\rho(x)| |f(x)| \\ &\leq (|\rho(x)|^{1/2} e^{\frac{a}{2}|x|}) (|\rho(x)|^{1/2} |f(x)|) \in L^1 \\ &\quad \in L^2 \quad \in L^2 \end{aligned}$$

Ainsi, ψ est bien définie, est holomorphe sur Ω_a et on

$$a: \forall z \in \Omega_a, \forall m, \psi^{(m)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^m e^{-izx} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

En particulier, pour $z = 0$, on a :

$$\psi^{(m)}(0) = \frac{(i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^m \varphi(x) dx = \frac{(i)^m}{\sqrt{2\pi}} \langle x^m, f \rangle_{L^2} = 0 \text{ car } f \in F^\perp$$

Comme Ω_a est connexe, par le principe du prolongement analytique, on a $\psi = 0$ sur Ω_a . On en déduit que $\hat{\varphi} = 0$ sur $\mathbb{R}$, et comme la transformée de Fourier est injective, on a $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f = 0$ car $\varphi > 0$.

Exemple : Si I est borné

$$\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \text{ (polynômes de Hermite)}$$

Leçons: 207: prolongement de fonctions.

213: espaces de Hilbert.

209: Approximation d'une fonction par des polynômes

239: Fonctions définies par une intégrale

240: Produit de convolution, transformation de Fourier

245: Fonctions holomorphes.

201: espaces de fonctions.