

Sujet choisi : 208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Autre sujet :

Proposition 8 : Si V est un sous-espace d'un evn E , alors $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, un hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E .

II - Applications linéaires continues

Théorème 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F des evn.

Alors il y a équivalence entre :

1. f est continue sur E .
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B_E(0,1)}$.
4. f est bornée sur la sphère unité $S_E(0,1)$.
5. $\exists M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$.
6. f est lipschitzienne.
7. f est uniformément continue sur E .

Définition 10 : On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on définit la norme subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Exemple 11 :

1. $E = F = \mathbb{R}^n$. $\|A\|_p = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.
2. $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $S_0 : f \mapsto f(x_0)$ pour $x_0 \in [0,1]$. S_0 est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ ($\|S_0\|_\infty = 1$), mais pas pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
3. $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ et $i : f \mapsto \int_a^b f$. i est continue pour $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$: $\|i\|_\infty = b-a$, $\|i\|_1 = 1$ et $\|i\|_2 = \sqrt{b-a}$.

Dans toute la leçon, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vect.

I - Espaces vectoriels normés

Définition 1 : $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
3. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est alors un espace vectoriel normé, noté evn.

Exemple 2 :

- * $E = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- * $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$.
- * $E = L^p(X, \mu)$ ou (X, μ) est un espace mesuré, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ est une norme pour $p \geq 1$.
- * $E = C^0([a,b], K)$, $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.

Définition 3 : Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_m, \|\cdot\|_m)$ m evn. On munit $E_1 \times \dots \times E_m$ d'une structure d'evn :

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty = \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_m\|_m).$$

Remarque 4 : $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ définit une distance sur E , donc une topologie. Les opérations $(x,y) \mapsto x+y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues pour cette topologie. (topologie pnt)

Définition 5 : Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont équivalentes s'il existe $a, b > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Exemple 6 : Pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 7 : Deux normes équivalentes définissent la même topologie.

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 208

Autre sujet :

D1

Théorème 21 (Riesz) : La boule unité fermée d'un evn de dimension infinie n'est pas compacte.

IV - Le cas des espaces de Banach

Définition 22 : Un espace de Banach est un evn complet.

Exemple 23 : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^n, M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 24 : Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Théorème 25 : Si F est un espace de Banach, $L_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Corollaire 26 : Si E est un evn, le dual topologique de E , noté $E' = L_c(E, \mathbb{K})$, est un espace de Banach.

Corollaire 27 : Soient E un espace de Banach et $u \in L_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $\text{Id} - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in L_c(E)$.

Proposition 28 : Un evn est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 29 : Soit E un evn. Il existe un espace de Banach $\hat{E}$ et une injection linéaire $\varphi : E \rightarrow \hat{E}$ conservant la norme tel que $\varphi(E)$ est dense dans $\hat{E}$. Le couple $(\varphi, \hat{E})$ est appelé complété de E .

Remarque 12 :

1. Si λ est une valeur propre de $f \in L_c(E, E)$, $|\lambda| \leq \|f\|$.

2. Pour $f \in L_c(E, F)$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$.

Proposition 13 : $(L_c(E, F), \|\cdot\|)$ est un evn.

Proposition 14 : Soient E, F et G des evn et $f \in L_c(E, F)$, $g \in L_c(F, G)$. Alors $g \circ f \in L_c(E, G)$ et de plus,

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|.$$

III - Le cas de la dimension finie

Théorème 15 : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 16 : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn (quelconque) est continue.

Corollaire 17 : Tout evn de dimension finie est complet.

Corollaire 18 : Tout sous-espace de dimension finie d'un evn est fermé.

Corollaire 19 : Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont exactement les parties fermées bornées.

Contre-exemples 20 : en dimension infinie

1. $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\sum_{i=0}^n a_i X^i\|_\infty = \sup_{i=0, \dots, n} |a_i|$,

$P \mapsto P'$ n'est pas continue.

2. $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

D2

De plus, si u est une application linéaire continue de E dans un espace de Banach F, il existe une unique application linéaire continue $\hat{u} : \hat{E} \rightarrow F$ telle que $\hat{u} \circ \varphi = u$. <u>V - Théorème de Baire et applications</u> <u>Définition 30</u>: Un espace métrique E est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E. <u>Proposition 31</u>: Un espace E est de Baire si et seulement si toute union de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide. <u>Théorème 32 (Baire)</u>: Tout espace complet est de Baire. En particulier, tout espace de Banach est de Baire. <u>Application 33</u>: Un $\mathbb{R}$ admettant une base dénombrable infinie n'est pas complet. <u>Application 34</u>: Dans l'espace $(C([0,1], \mathbb{R}), \ \cdot\ _\infty)$, l'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables est dense. <u>Théorème 35 (Banach-Steinhaus)</u>: Soit E un espace de Banach, F un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors: 1. soit H est borné: $\exists M > 0, \forall f \in H, \ f\ \leq M$. 2. soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \ f(x)\ = +\infty$.	<u>Application 36</u>: Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier. <u>Corollaire 37</u>: Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F qui converge vers f. Alors f est linéaire et continue. <u>Théorème 38 (de l'application ouverte)</u>: Soient E et F des espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Si f est surjective, elle est ouverte. En particulier, si f est bijective, f^{-1} est continue. <u>Théorème 39 (du graphe fermé)</u>: Soient E et F des espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Alors f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$. <u>Application 40</u>: Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E. Alors il existe une projection continue de E sur F si et seulement si il existe un sous-espace fermé G tel que $F \oplus G = E$.
--	---

Questions

1. Def $\|f\|_p$ est une norme (exple 2).
 $f, g \in L^p(X, \mu)$. $\|f+g\|_p^p \leq \left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{1/p} + \left[\int_X |g|^p d\mu \right]^{1/p}$. (?)
2. Def 3. Si on met une Σ à la place du max?
 $\rightarrow$ définit aussi une norme qui est équiv. (peut expliciter 2 cas)
 • Si on met une $\sqrt{\Sigma}$ à la place du max?
 $\rightarrow$ encore une norme équiv. (voir exple 6)
3. Thm 15
 Dans $\mathbb{R}^n$, Bolzano-Weierstrass $\rightarrow$ sphère unité compacte pour la $\|\cdot\|_2$.
 (de la suite bornée on peut extraire une suite agle)
 Démon du Thm 15 E evn de dim finie n . $\|\cdot\|$ $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .
 $\|\Sigma x_i e_i\|_\infty = \sup |x_i|$. $\leftarrow$ On déf...
 $\|\cdot\|$ est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}$. (?)
 $\|\Sigma x_i e_i\| \leq \Sigma \|x_i e_i\| \leq \Sigma \|e_i\| \|x_i\|$
4. Corollaire 18. Démon sans utiliser le corollaire 11. (?)
5. Thm de Riesz (21) Application?
6. Thm de Baire (32). Vrai juste pour les complés?
 Cmt il se démontre?
7. Thm 38 & 39. Grenier que E et F soient des Banach?
 Graphe = $\{x, f(x)\}$. Fermé au sens topologique.
8. Thm 39. UKB? Exple où on ne pourrait faire autrement.
4. Que équiv. des normes. Par la de complétude
 F dim finie $< E$. $(e_1, \dots, e_n)$ base. $(x_k) \in F^{\mathbb{N}} \rightarrow x \in E$.
 Si $x \notin F$, $(e_1, \dots, e_n, x)$ base de $F \oplus \langle x \rangle$
 $(x)_{n+1} = 0$
 $(x)_{n+1} = 1$) absurde
 Car converger c'est avoir coord par coord. $\leftarrow$ équiv des $\|\cdot\|$.

Exercices

1) $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$. $\mathcal{H} = \{(x, y, z), x+y+z=0\}$. min $\|p\|$ où p projecⁿ
 $\mathcal{H}^\perp$ selon $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \oplus \mathcal{H} = \mathbb{R}^3$.

→ D le cas euclidien: 1.

→ Soit p une projecⁿ $\forall \mathcal{H}$ selon $\mathcal{D}$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
 $p(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ supplémentaire
à $\mathcal{H} \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pas ds $\mathcal{H}$. On peut prendre $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$
(quitte à mult. par une constante).

On exprime la proj par une matrice. On obtient min = $1/3$
(obtenu par $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$).

2) $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Convolution possible?

[Convolution de $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$: $f * g(x) = \int_X f(x-t) g(t) dt$.]

$fg: f \mapsto f * g$. fg est linéaire

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| |g(t)| dt dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx dt$$

$$\leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \rightarrow$ intéressant.

Convolution $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^p \rightarrow$ norme de $\mathcal{L}^p$

[Rebours leçon]

- Problème : Le trop de complétude (moitié de la leçon !)
- M. hors-sujet (Riesz-Fisher)
- L'avis + que les idées de dcm.
- Longue d'expos
 - ↳ permettent de motiver des thms (eg. gphc fermé)
- Difficile de mq les normes p des espaces L^p sont des normes.
- (Q2) Limite hors-sujet (autre résultat de complétude)
- Il faut réfléchir aux questions & les dir. sur le plan
- Aut de dire que + et - sont continus : dire que $\|\cdot\|$ déf une topo pr laquelle $\|\cdot\|$ est continue
- Essentiel : $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ & $\|\cdot\|_n$ déf une topo. qui est la topo pdt
↑ ie dire qu'une suite crge pour $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ = dire que la suite crge
coord par coord
pour $\|\cdot\|_{\text{equiv}}$
- $\Leftrightarrow$ ce de continuité en 0 et bornée si $\overline{B_E(0,1)} : \mathbb{Q}$ qui tombera,
réponse rapide et précise attendue
- Et thm doit être accompagné d'un exple d'applicaⁿ
(sinon du le plan au moins du le noter du candidat)
- Et l'équiv des normes : la justification de la compacité de la
base $\Rightarrow$ doit être justifiée
- Equiv des normes : casse-gueule
Implt : on compare Her $\|\cdot\|$ à $\|\cdot\|_{\text{sup}}$
- Dq des appli li en dim ∞ et colucées du $\|\cdot\|$ d'appli li
s'est pas sent facile $\rightarrow$ donne des exples.
- Leçon à ne pas faire à un niveau trop élevé
- Exples. Aut de parler du L^p parler des fctⁿ continues, des fctⁿ $\mathcal{C}^k$
(norme = norme sup de la deriv + norme sup de la fctⁿ)
On peut mettre $\mathcal{C}^k$ $\mathcal{C}^k([0,1])$ soit des evn (dedantel $\rightarrow$ $\mathcal{C}^k$ habituel)

[Dqs si le lhm du gphc fermé]

Manière de le mettre. Appli li bijective $\mathcal{C}^\infty$. L'inverse n'est pas fermé $\mathcal{C}^\infty$ (exple?)

↳ ms si on rajoute des hypothèses de complétude (Banach):...

Quesako: Qq $\varphi: E \rightarrow F$ continue. Que faut-il faire?

espace métrique $\rightarrow$ critère de suites

$(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \rightarrow x \in E$. $\sup \|f(x_n)\|$ croise

$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$

Avec le gphc fermé: $(x_n, \varphi(x_n)) \rightarrow (x_n, y_n)$

$\in E \quad \in F$

Pas besoin que $\varphi(x_n)$ croise. Il reste à montrer que $y = \varphi(x)$

Exple: (possible sans le gphc fermé ms bien + facile car)

g mesurable IR. $\forall f \in \mathcal{L}^p, f g \in \mathcal{L}^1$

$\begin{cases} f_1 \mapsto f g \\ \mathcal{L}^p \mapsto \mathcal{L}^1 \end{cases}$ linéaire $\mathcal{C}^\infty?$

$\hookrightarrow$ gphc fermé.

$f_n, f \in \mathcal{L}^p \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$

$f_n g \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f g$

$\begin{cases} f_n(p) \xrightarrow{PP} f \\ f_n(p) g \xrightarrow{PP} f g \end{cases}$

$f_n(p) \xrightarrow{PP} f$

super implt!!
Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\subseteq g \in \mathcal{L}^q \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in [1, +\infty]$$

$$p, q \in [1, +\infty]$$

[Exple de Plan]

I] Defs

II] Les ter équivallence (appli C^0)

III] Dim Anie

- equiv normes

- B -espace de dim finie fermé

- compact $\forall \| \cdot \| =$ fermé borné $\forall \| \cdot \|$

- appli k evn de dim finie $\rightarrow F = C^0$

III. III

$\Rightarrow$ norme d'une appli k
à l'aide est la norme
($\sup \leadsto \max$)

(pour autant pas sembler facile à calculer)

ex. normes de proj

thm de Bernstein (peut faire un dev) : poly trigo, $d^0 \leq n$, $\| \cdot \|_\infty$ norm
dérivation de norme n .

(- Thm de Riesz : oh ms les d'applica° d'exple)

$\hookrightarrow$ outil fondamental.

si on a un op. compact, le B -esp. propre associé à une
vp est de dim. finie.

Thm de Hardy. $f \in \mathcal{A}^p([0, +\infty[)$ $p > 1$ $I_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$
 $\hookrightarrow$ bon dev.

Demme de passer la convexité B silence : les boules sont
convexes ! Prolongement des appli k continues.

Léon 208 : Enm, applications linéaires continues. Exemples.

D1 : Complétude de L^p pour $p \in [1, +\infty]$.

→ Référence : Rudin, Real and Complex Analysis, p 68-69.

Théorème :

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace vectoriel normé $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

Démonstration :

* Cas $p = \infty$: Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^∞ .

On choisit des représentants de chaque f_n qu'on appellera encore f_n .

Soit $A_k = \{x \in X \mid |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$ et $B_{n,m} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$.

Ces ensembles sont de mesure nulle par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donc leur réunion (dénombrable) est encore de mesure nulle.

Pour $x \in X \setminus E$, $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers un réel $f(x)$. On obtient f mesurable bornée sur $X \setminus E$, que l'on étend par 0 sur E . D'où $f \in L^\infty$ et la suite $(f_n)_n$ converge alors uniformément vers f sur $X \setminus E$. Donc $f_n \rightarrow f$ dans L^∞ .

* Cas $p < \infty$: Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^p .

On choisit des représentants de chaque f_n qu'on appellera encore f_n .

On peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ vérifiant :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$$

On définit alors : $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ et $g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$.

Ce sont des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$. Avec l'inégalité triangulaire,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^k 2^{-i} \leq 1.$$

Donc avec le théorème de convergence monotone, $\|g\|_p \leq 1$.

D1 : 1/2

En particulier, ces fonctions sont finies presque partout et donc pour presque tout x , la série $\sum f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$ converge absolument.

Comme $\mathbb{R}$ est complet et comme c'est une série télescopique, cela signifie que $f_{n_i}(x)$ converge vers la somme de la série notée $f(x)$.

Cela définit f presque partout, puis on complète par 0.

On cherche à montrer que f est dans L^p et que $(f_n)_n$ converge vers f pour la norme L^p . Revenons au fait que (f_n) est de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, \int |f_n - f_m|^p < \varepsilon^p$$

En prenant $n = n_i$, on a par le lemme de Fatou :

$$\int |f - f_m|^p \leq \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^p < \varepsilon^p.$$

D'où, avec l'inégalité triangulaire, f est dans L^p et de plus, $f_n \rightarrow f$ dans L^p . □

Remarque: On a montré que de toute suite convergente dans L^p , on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.

Leçon 208: Evn, applications linéaires continues. Exemples.

D2: Théorème de Banach-Steinhaus et exemple de fonction continue différentiable de sa série de Fourier

→ Référence: Gourdon, Analyse, p 404-406

Théorème (Banach-Steinhaus): E evn complet

Soit E un espace de Banach et F un evn. Pour $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$:

1. soit H est bornée: $\exists M > 0, \forall f \in H, \|f\| \leq M$.
2. soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\|_F = +\infty$.

Démonstration: $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ pour f linéaire fini. si f continue.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_n = \{x \in E \mid \sup_{f \in H} \|f(x)\|_F > n\}$.

Par continuité des $f \in H$, Ω_n est un ouvert de E pour tout n . 2 cas:

1. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que Ω_n n'est pas dense dans E .
En d'autres termes, il existe $x_0 \in E$ et $\epsilon > 0$ tels que $B(x_0, \epsilon) \cap \Omega_n = \emptyset$.

Par conséquent, pour tout $x \in B(x_0, \epsilon)$,

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\|_F \leq n$$

donc pour tout $x \in B(0, \epsilon)$ et $f \in H$,

linéarité de f
+ ineq triang

$$\|f(x)\|_F \leq \|f(x+x_0)\|_F + \|f(x_0)\|_F \leq 2n.$$

Donc H est bornée. $\exists \eta, \forall x \in B(0, \eta), \forall f \in H, \|f(x)\|_F \leq \eta$

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, Ω_n est dense dans E , alors E étant complet, le théorème de Baire assure que $\Omega = \bigcap_{n \geq 0} \Omega_n$ est dense dans E .

Soit $x \in \Omega$. $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{f \in H} \|f(x)\|_F > n$.

D'où $\sup_{f \in H} \|f(x)\|_F = +\infty$. □

sup $\rightarrow$ il y en a 1 $\rightarrow$ union d'ouvert (pas d'ouvert d'intégral?)

Application :

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 2π -périodiques. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on note

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n : \begin{cases} C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi} \\ f \mapsto [t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt}] \end{cases}$ et $l_n : \begin{cases} C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto S_n(f)(0) \end{cases}$

On munit $C_{2\pi}$ de la norme $\|f\|_{\infty} = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$. Alors il existe $f \in C_{2\pi}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(f)(0)| = +\infty$.

Démonstration :

* L'application l_n est clairement une forme linéaire. Montrons qu'elle est continue. Soit $f \in C_{2\pi}$ telle que $\|f\|_{\infty} = 1$.

$$\text{Comme } \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}, \quad l_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} f(t) dt.$$

$$\text{D'où } |l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\text{On pose } f_{\varepsilon} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon} \end{cases} \quad \text{où } D_n(t) = \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

$$\text{On a } \|f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{et} \quad |l_n(f_{\varepsilon})| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt \right|$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \quad \text{par conv. dominée.}$$

$$\text{Donc } \|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt.$$

* Comme pour $t \in \mathbb{R}$, $|\sin \frac{t}{2}| \leq |\frac{t}{2}|$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|l_n\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}t)|}{|\frac{t}{2}|} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \quad \text{qui diverge quand } n \rightarrow +\infty$$

(en effet, $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin u| du = \frac{2}{n\pi}$). fonc. bornée $X \rightarrow \mathbb{R}$

Or, $C_{2\pi}$ est complet (car c'est un fermé de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ qui est complet).

En appliquant le théorème de Banach - Steinhaus, il existe $f \in C_{2\pi}$ telle que $\sup_{n \geq 1} |l_n(f)| = +\infty$.