

NOM : UMBER

Prénom : Pierre

Jury :

207*

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Autre sujet :

<u>I. Prolongement de fonctions continues.</u> <u>Def 1 :</u> Soit X espace topologique, $A \subset X$, Y espace topologique, $f: A \rightarrow Y$ fonction $\mathcal{C}^0$. Un prolongement continu de f à X est une fonction $g: X \rightarrow Y$ $\mathcal{C}^0$, avec $g _A = f$. <u>Prop 2 :</u> (principe de prolongement des identités). On suppose X séparé. Alors deux prolongements continus de f à $\bar{A}$ sont égaux. <u>Prop 3 :</u> Soit $f: A \subset X \rightarrow Y$ $\mathcal{C}^0$ et $a \in \bar{A} - A$. On suppose que f admet une limite l en a. Alors, en adjoignant à f la valeur l en a, on obtient un prolongement continu de f. <u>Ex. 4 :</u> $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en 0 par 1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne se prolonge pas en 0. <u>Def 5 :</u> X est T_4 si tout fermé disjoint de F_1 et F_2 de X peuvent être séparés par des ouverts ($F_1 \subset U_1, F_2 \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$). Si, de plus, X est séparé, on dit que X est normal. <u>Def 6 :</u> X possède la propriété de Tietze si, pour tout fermé $F \subset X$, et pour toute $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, f se prolonge par continuité à X.	<u>Def 7 :</u> X possède la propriété d'Urysohn si, pour tous $F, G \subset X$, fermés, $F \cap G = \emptyset$, il existe $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, $f _F = 1$ et $f _G = 0$. <u>Théorème 8 :</u> X est T_4 ssi X possède la propriété de Tietze ssi X possède la propriété d'Urysohn. <u>Prop 9 :</u> Un espace compact (séparé) est normal. Un espace métrique est normal. <u>Prop 10 :</u> Soit X un espace localement compact, $K \subset V \subset X$, K compact, V ouvert. Alors il existe un ouvert relativement compact U, $K \subset U \subset V$. En particulier: $\exists f: X \rightarrow [0, 1]$ $\mathcal{C}^0$, $f _K = 1, f _{V^c} = 0$. <u>App. 11 :</u> Si X est localement compact non compact, $\mathcal{C}_c^0(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(X)$. <u>App. 12 :</u> Si $U \subset \mathbb{R}^d$, U ouvert, et $p \in \mathbb{R}^d \setminus U$, alors $\mathcal{C}_c^0(U)$ est dense dans $L^p(U, \lambda)$. <u>Def. 13 :</u> X est T_3 si, pour tout $F \subset X$ fermé et $x \in F^c$, F et $\{x\}$ peuvent être séparés par des ouverts. <u>Prop 14 :</u> X est T_3 ssi X est localement fermé. <u>Lemme 15 :</u> Soit $f: A \subset X \rightarrow Y$ $\mathcal{C}^0$, Y localement fermé. On suppose que: $\forall a \in \bar{A} - A, \exists l_a, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_a$. Alors, en adjoignant à f les valeurs l_a en a, on obtient un prolongement continu de f. <u>Rem. 16 :</u> Un espace métrique est localement fermé.
---	---

Théorème 17. Soient $(X, d), (Y, d)$ espaces métriques, $A \subset X$. On suppose X et Y complets et $f: A \rightarrow Y$ uniformément continue. Alors f se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f}$ sur $\bar{A}$. Si, de plus, f est une isométrie, alors ce prolongement est une isométrie.

Cor. 18. Tout espace métrique admet un unique completé et isométrie prés.

Ex. 19: Soit E un Banach, $f: [a; b] \rightarrow E$ dérivable et f' bornée. Alors f se prolonge par continuité en b .

II Prolongement de morphismes.

1) Théorème de Hahn-Banach $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit E un K -e.v.m., $F \subset E$. On note E' le dual topologique.

Théorème 20 (Hahn-Banach): Soit $g \in F'$. Alors g se prolonge en une application $\tilde{g} \in E'$ avec $\|\tilde{g}\| = \|g\|$.

App. 21. L'espace E' sépare les points.

App. 22. $\tilde{F} = E \Leftrightarrow \forall f \in E', f|_F = 0 \Rightarrow f = 0$

App. 23. Soit $x \in E$. Alors: $\exists f \in E', \|f\| = \|x\|$ et $f(x) = \|x\|^2$.
En particulier, $\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)|$

2) Utilisation de la complétude

Le principe du prolongement des identités va permettre de prolonger des morphismes de groupes ou applications linéaires en utilisant le théorème 17. La connaissance de parties denses est alors utile.

Ex 24. Si $H \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe, alors $H = a\mathbb{Z}$ ou $H = \mathbb{R}$

DEV 1 Soit $G \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ un sous-groupe infini.

Alors $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{U}) \simeq \mathbb{Z}$

Prop 25: Soit E, E' des espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}_c(F, E')$ avec $F \subset E$ s.e.v., $\tilde{F} = E$. Alors T se prolonge de manière unique en un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}_c(E, E')$, et $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

App 26 (Th. de Plancherel) Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
Ainsi, $\hat{\cdot}$ se prolonge de manière unique en $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$.

De plus, $\mathcal{F}$ est une isométrie bijective.

App. 27. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, alors $\mathcal{H}$ est isométrique à un $\ell^2(I)$, où I est un ensemble

App. 28 Si E est un espace de Banach et si l'on pose $\mathcal{R}([a; b], E) := \overline{\mathcal{E}([a; b], E)}^{p\text{-norm}}$, on peut définir sur cet ensemble l'intégrale de Riemann. On a $\mathcal{E}([a; b], E) \subset \mathcal{R}([a; b], E)$.

III Régularité supérieure.

Prop 29: Soit E un e.v.m., $f: [a; b] \rightarrow E$ $\mathcal{C}^0$ sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ tel que f admet une limite l en b . Alors f est dérivable en b et $f'(b) = l$.

App. 30: la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$

Cor 31. Si $U \subset \mathbb{R}^d$, ouvert, $K \subset U$, compact, alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, avec $\varphi|_K = 1$ (fonction plateau).
On considère à présent E un espace de Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f: U \rightarrow E$ $\mathcal{C}^0$ et localement lipschitzienne ou la seconde variable.

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ avec $(t_0, x_0) \in U$

Théorème 32 (Cauchy - Lipschitz):

- Tout problème de Cauchy admet une solution sur un intervalle ouvert contenant t_0
- Si $\varphi: I \rightarrow E$ et $\psi: J \rightarrow E$ sont deux solutions du même problème de Cauchy, alors $\forall t \in I \cap J, \varphi(t) = \psi(t)$
- Si φ est une solution maximale, alors son intervalle de définition est ouvert
- Toute solution se prolonge en une unique solution maximale

Prop 33. Si $U = I \times V$, I intervalle ouvert, si f est bornée et si $\varphi: J \rightarrow E$ est une solution maximale, alors $J = I$

Lemme 34: Soit $(t_0, x_0) \in U$. Alors il existe $I \times V$ voisinage ouvert de $I \times V$ tel que, pour tout $(t_1, x_1) \in I \times V$, il existe une solution au problème de Cauchy (t_1, x_1) définie sur I .

Théorème 35 (maximation a priori): On suppose $U = I \times V$, avec $I =]a, \beta[$. Soit (f, φ) une solution maximale, avec $J =]a, b[$. Si $b < \beta$, alors pour tout compact $K \subset V$, il existe $t \in J$ tel que: $\forall s \in]t, \beta[, \varphi(s) \notin K$,

IV. Prolongement analytique.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$

Théorème 36: On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que: $\forall m \in \mathbb{N}, f^{(m)}(z_0) = g^{(m)}(z_0)$. Alors $f = g$

Théorème 37 (principe du prolongement analytique). On suppose que $f|_A = g|_A$, où $A \subset \Omega$ possède un point d'accumulation. Alors $f = g$

Théorème 38 (principe des zéros isolés). On suppose que f est non constante. Alors: $\forall z \in \mathbb{C}, f^{-1}(\{z\})$ est un fermé isolé de Ω .

Cor. 39: f se prolonge sur un ouvert maximal connexe de manière unique en une fonction holomorphe

DEV 2 Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable.

On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{at} |\varphi(s)| ds < \infty$

On note (P_n) la famille orthogonale associée à φ .

Alors (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I, \varphi)$

Prop 40 (singularité effaçable) On suppose $\Omega = D(z_0, R) - \{z_0\}$

On suppose f bornée au voisinage de z_0 . Alors f se prolonge par continuité sur $D(z_0, R)$ en une fonction holomorphe.

Prop 41 (Morera): Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose que pour tout triangle inclus dans Ω , $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$ alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

Prop 42 (Principe de réflexion de Schwarz): Soit Ω ouvert symétrique par rapport à l'axe des réels, on pose $\Omega_+ := \Omega \cap \mathbb{R}$ et $\Omega_- := \Omega \cap \{Im > 0\}$ et soit $f \in \mathcal{O}(\Omega_+)$.

On suppose que f se prolonge par continuité sur Ω_0 en prenant des valeurs réelles. Alors il existe

$F \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $F|_{\Omega_+} = f$.

Dual topologique de $\mathbb{U}$

Proposition: Soit G un sous-groupe de $\mathbb{U}$ infini
alors $(\text{Hom}_0(G, \mathbb{U}) = \mathbb{Z})$

démonstration: *1^{er} cas: $G = \mathbb{U}$.

Soit $f \in \text{Hom}_0(G, \mathbb{U})$, on pose $\varphi: t \in \mathbb{R} \mapsto f(e^{it}) \in \mathbb{C}^*$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $F_a: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{x+a} \varphi$ $\in \mathbb{C}^*$.

on a alors $F_a(x) = \varphi(x) F_a(0)$ car f est un morphisme de groupes. Par ailleurs, $a \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^a \varphi$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $g'(a) = f(e^{ia})$ et $g'(0) = 1 \neq 0$

Ainsi: $\exists a \in \mathbb{R}, F_a(0) \neq 0$

donc $\varphi = F_a(0)^{-1} F_a$ est $\in \mathbb{C}^*$.

Soit à présent $s, t \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$, donc:

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, g'(s+t) = g'(s)g'(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = g'(0)g'(t)$$

Ainsi, comme $g(0) = 1$, on a $g(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Comme $\text{Im} g \subset \mathbb{U}$, $\lambda \in i\mathbb{R}$, et comme $g(2\pi) = g(0) = 1$,

on a $\lambda \in \mathbb{Z}$, donc: $\exists k \in \mathbb{Z}, f(z) = z^k$. Réciproquement, les fonctions puissances commencent, et on a $\text{Hom}_0(G, \mathbb{U}) = \mathbb{Z}$

*2^{ème} cas: G est un sous-groupe infini.

Soit $f \in \text{Hom}_0(G, \mathbb{U})$. Montrons que f est $\in \mathbb{C}^*$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que $\forall x \in G, |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

(on a $f(1) = 1$). Soit à présent $z \in G$ tel que

$|x - z| < \delta$, alors $|xz^{-1} - 1| < \delta$ car $|z| = 1$, donc

$|f(xz^{-1}) - 1| < \varepsilon$, donc $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. Ainsi, f est $\in \mathbb{C}^*$

On voit que $\phi: (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{U}, *)$ est un isomorphisme

$$y \mapsto e^{iy}$$

de groupes topologiques, et $\phi^{-1}(G)$ est un sous-groupe

infini de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qui se relève en un sous-groupe de $\mathbb{R}$

qui n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$, donc qui est dense dans $\mathbb{R}$

Ainsi, on a $\overline{G} = U$.

Comme U est complet, f se prolonge en un unique morphisme de groupes sur U , qui est alors une puissance k -ième d'après le 1^{er} cas, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Par suite, on a $f: z \mapsto z^k$.

- détailler pourquoi $F_a(x) = F_a(0) \cdot \varphi(x)$

$$\begin{aligned} F_a(b) &= \int_a^{a+b} f(e^{it}) dt = \int_0^a f(e^{i(u+x)}) du \\ &= \int_0^a f(e^{iu}) f(e^{ix}) du = \varphi(x) \cdot F_a(0) \end{aligned}$$

- Que veut dire l'énoncé ?

- Def d'un gpe topologique ?

$(G, \mathcal{O})$ $f: G \times G \rightarrow G$, $x, y \mapsto xy$ ($\circ$ et $g: G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$) $\mathcal{O}$

- Le gpe de $\mathbb{R}$ = soit $\mathbb{Z}$ soit dense. Idée de la preuve ?

(On regarde en 0 (on pourra traduire) Si pas $a \in \mathbb{Z}$, intervalle
un pt ouvert autour de 0 (n'importe quel pt ouvert))

Base Hilbertienne de polynômes

proposition: Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable.
Soit $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$

On note (P_n) la famille orthogonale associée à ρ
alors (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

démonstration: Comme $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert,
 (P_n) est une base hilbertienne si et seulement si $F^\perp = \{0\}$
où $F := \text{Vect } P_n = \text{Vect } \{x \in I \mapsto x^n\}$. Soit $f \in F^\perp$.

Comme $f \in L^2(I, \rho)$, $\int_I |f|^2 \rho < \infty$

Par ailleurs, $\|f\rho\| = \|f\rho^{1/2}\|_{L^2(I)} \| \rho^{1/2} \|_{L^2(I)}$

donc $f\rho \in L^1(I)$, et si l'on pose $\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_I(x) \rho(x) f(x)$,
on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée
de Fourier $\hat{\varphi}: \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx$.

On pose $\Omega_a := \{z \in \mathbb{C}, |\text{Im } z| < \frac{a}{2}\}$ ouvert connexe de $\mathbb{C}$.
On prolonge $\hat{\varphi}$ en $\psi: \Omega_a \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \varphi(x) dx$

Montrons que ψ est bien définie et holomorphe sur Ω_a :

On pose $g: \Omega_a \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $(z, x) \mapsto e^{-izx} \varphi(x)$

$\cdot$ z est σ -finie

$\cdot \forall x \in \mathbb{R}, g(\cdot, x)$ est holomorphe

$\cdot \forall z \in \Omega_a, g(z, \cdot)$ est mesurable

$\cdot \forall z \in \Omega_a, \forall x \in \mathbb{R}, |g(z, x)| \leq e^{|\text{Im } z||x|} |\varphi(x)|$
 $\leq (|\varphi(x)|^2 e^{\frac{a}{2}|x|})^{1/2} (|\varphi(x)|^2)^{1/2} \in L^1 \times L^2 \in L^2$

Ainsi, ψ est bien définie, est holomorphe sur Ω_a et on

$$a: \forall z \in \Omega_a, \forall m, \psi^{(m)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^m e^{-izx} \psi(x) dx.$$

En particulier, pour $z = 0$, on a :

$$\psi^{(m)}(0) = (i)^m \int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = (i)^m \langle x^m, f \rangle_{L^2} = 0 \text{ car } f \in F^\perp$$

Comme Ω_a est connexe, par le principe du prolongement analytique, on a $\psi = 0$ sur Ω_a . On en déduit que $\hat{\psi} = 0$ sur $\mathbb{R}$, et comme la transformée de Fourier est injective, on a $\psi = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $f = 0$ car $\psi > 0$.

Exemple: Si I est borné

$$\psi: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \text{ (polynômes de Hermite)}$$

Leçons: 207: prolongement de fonctions.

213: espaces de Hilbert.

209: Approximation d'une fonction par des polynômes

239: Fonctions définies par une intégrale

240: Produit de convolution, transformation de Fourier

245: Fonctions holomorphes.