NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : 205*

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Espaces complets. Exemples et applications.

Autre sujet :

I- Espaces complets - Généralités

On considère ici un espace métrique (X, d).

A) Définitions

Déf 1: Une suite $(x_n)_n$ de (X,d) est dite de Cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Rq 2: Toute suite de Cauchy est bornée.

Ex 3: Toute suite convergente de X est de Cauchy

Prop 4: Une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence a une limite.

Cex 5: Soit $(x_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

Alors (x_n) est de Cauchy mais tend vers $\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$

Cex 6: La valuation sur $K[X]$ avec K corps est :
$v(P) = \begin{cases} \min\{n, a_n \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$, puis la distance

$d(P,Q) = \exp(-v(P-Q))$ avec $P, Q \in K[X]$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}\right)_n$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $(K[X], d)$.

Déf 7: Un espace (X,d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Ex 8: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Cex 9: $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Ex 10: Soit la distance sur $]0,\infty[$ suivante :
$\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, pour $x, y \in]0, \infty[$

Alors $(]0,\infty[, \delta)$ n'est pas complet, mais $([0;1], \delta)$ l'est.

Prop 11: Soit (X,d) et (Y,d') métriques. Alors :
X et Y sont complets $\Longleftrightarrow$ $X \times Y$ est complet (pour la topologie produit)

Ex 12: $\mathbb{R}^n$ est complet

Prop 13: Toute partie complète de (X,d) est fermée.

Prop 14: Tout fermé d'un espace complet est complet.

Prop 15: Soit $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés non vides de E avec $|F_n| \to 0$ ($|F_n|$ étant le diamètre de F_n), avec E complet.
Alors il existe $x \in E$ avec $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$

B) Compacité et complétude

Prop 16: Un espace métrique compact est complet

Ex 17: $[0,1]$ est complet.

Déf 18: Soit E $\mathbb{R}$ev$d$f et $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts non vides. On pose pour $A, B \in \mathcal{K}$
$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{x \in B} d(x,A), \sup_{y \in A} d(y,B)\right)$

Prop 19: d_H est une distance appelée distance de Hausdorff.

Th 20: $(\mathcal{K}, d_H)$ est complet — DVT

C) Complétion d'un espace métrique

Rq 21: On a déjà vu que (X,d) peut ne pas être complet.

Prop 22: Soit (Y, d_Y) et (Z, d_Z) complets. Si X est dense dans Y, et si $f : Y \to Z$ avec f uniformément continue sur $B_X(x, \rho)$ pour $x \in X$, et $\rho > 0$ uniforme, alors f s'étend de manière unique en une application continue de Y dans Z (même uniformément continue)

Th 23: Pour (X,d), il existe un unique espace métrique complet (à isométrie près) contenant X comme sous-espace dense, noté $(\hat{X}, \hat{d})$, qui vérifie : Toute application uniformément continue $f : X \to Y$ avec Y complet se prolonge de manière unique en une application continue de $\hat{X}$ dans Y.

Déf 24: $(\hat{X}, \hat{d})$ est appelé le complété de (X,d).

Ex 25: le complété de $(]0,1], |\cdot|)$ est $([0,1], |\cdot|)$

Prop 26: Si X est dense dans Y avec (Y,d) complet, alors (Y,d) est le complété de (X,d)

Ex 27: Le complété de $(]0,1], \delta)$ est lui-même [notation de ex 10]

Ex 28: Le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Réf :
* Gourdon, Analyse
* Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre
* Evans, PDE
* Demailly, Analyse numérique et équations diff.
* Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles
* Brézis, Analyse fonctionnelle

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : 205

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

← dev possible

II- Théorème de Picard

Th 29 : (Picard)
Soit (X,d) complet non vide. Toute application φ strictement contractante de X dans lui-même admet un unique point fixe $\alpha \in X$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite récurrente $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ tend vers α avec :
$$\forall n, d(x_n, \alpha) \leq k^n d(x_0, \alpha)$$

Appli 30 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ fermé et S_i : une famille finie de fonctions strictement contractantes. Il existe un unique compact de D non vide tel que :
$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \text{ [appelé attracteur des } S_i]$$

Ex 31 : cf annexe

A) Fonctions continues et EDOs

Prop 32 : L'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans un ~~compact~~ complet est complet pour la distance de la convergence uniforme.

Déf 33 : Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue. On dit que f est localement lipschitzienne en y si :
$\forall (t_0, y_0) \in U, \exists r_0, T_0, k > 0,$
- $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$
- $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$

Prop 34 : Soit $f \in C^0(U, \mathbb{R}^m)$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ avec $C_0 \subset U$. Posons $M = \sup_{C_0} \|f\|$ et $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$.
Soit $C_T = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$. Alors toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$, avec $I \subseteq [t_0 - T, t_0 + T]$ de $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ reste contenue dans $\bar{B}(y_0, r_0)$

Th 35 : (Cauchy-Lipschitz, local)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ localement lip. en y et C_T comme dans prop 34. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$

Rq 36 : Avec les notations précédentes, on a pour tout $z \in C^0([t_0 - T, t_0 + T], \bar{B}(y_0, r_0))$, la suite $\Phi^n(z) \to y$ uniformément avec :
$$\Phi(z)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\, du$$

Ex 37 : $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une solution unique au voisinage de 0 qui est $y : t \mapsto (t+1)^3$

Cex 38 : $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet deux solutions au voisinage de 0 : $y_1 \equiv 0$ et $y_2 = \cdot^3$

Th 39 : (Cauchy-Lipschitz, global)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ lipschitzienne en y avec $U = J \times \mathbb{R}^m$, J ouvert de $\mathbb{R}$. Alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(t,y)$ est globale.

Ex 40 : (Pendule sans frottement)
L'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

B) Théorème d'inversion locale

Th 41 : (Picard, paramétrique)
Soit (X,d) complet, Y topologique. Soit $f \in C^0(X \times Y, X)$ avec : $\exists 0 < k < 1, \forall x, x' \in X, \forall y \in Y,$
$$d(f(x,y), f(x',y)) \leq k\, d(x,x')$$
Alors pour tout $y \in Y$, l'équation $f(x,y) = x$ admet une unique solution $\varphi(y)$. De plus, φ est continue.

Th 42 : (Inversion locale)
Soit $f \in C^k(U \subseteq \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, $k \geq 1$ et $a \in U$, avec df_a inversible. Alors il existe $V \subseteq U$ ouvert avec $a \in V$ tel que $f : V \to f(V)$ soit un C^k-difféomorphisme.

Ex 43 : $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféo. local de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Appli 44 : Il existe deux ouverts U et V de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall B \in V, \exists! A \in U, A^2 = B$

Appli 45 : Il existe deux ouverts U et V de O_n et I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$ avec : $\forall B \in V, \exists! A \in U, B = \exp(A)$

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : 205

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

III - Complétude et EDPs

A) Espaces L^p

Déf 46 : Soit $1 \leq p < \infty$. On pose :
$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}$ et
$\|f\|_p := \left[\int_\Omega |f|^p\right]^{1/p}$ pour $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

Déf 47 : On pose $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists C > 0$, $|f(x)| \leq C$, $p\forall x \in \Omega\}$
et $\|f\|_\infty = \inf \{C, |f(x)| \leq C \ p\forall x \in \Omega\}$ avec $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$

Th 48 : (Hölder)
Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Alors $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$

Th 49 : (Minkowsky)
Pour $f, g \in L^p$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, pour $1 \leq p \leq \infty$.

Cor 50 : Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$

Th 51 : (Riesz-Fischer)
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet

B) Espaces de Hilbert

Déf 52 : Un espace de Hilbert H est un ev muni d'un produit scalaire, complet pour la norme

Ex 53 : (Fondamental)
L^2 est de Hilbert.

Th 54 : Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors :
$\forall f \in H$, $\exists!\, P_K f \in K$, $\|f - P_K f\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$
De plus, $P_K f$ est caractérisé par :
(i) $P_K f \in K$ (ii) $\langle f - P_K f, v - P_K f \rangle \leq 0$, $\forall v \in K$

Cor 55 : Si $K \subset H$ est un sev fermé et $f \in H$, alors
$u = P_K f \iff \begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$
De plus P_K est un opérateur linéaire.

Th 56 : (Riesz-Fréchet)
Soit $\varphi \in H'$. Alors :
$\exists!\, f \in H$, $\varphi(v) = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in H$.
De plus, $\|f\| = \|\varphi\|_{H'}$

Déf 57 : Une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est
- continue si $\exists C > 0$, $\forall u, v \in H$, $|a(u,v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|$
- coercive si $\exists \alpha > 0$, $\forall v \in H$, $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$

Th 58 : (Stampacchia) DV2
Soit a continue coercive et $K \subseteq H$ fermé convexe non vide. Alors : $\forall \varphi \in H'$, $\exists!\, u \in K$, $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)\ \forall v \in K$
De plus si a est symétrique :
$x = u \iff \begin{cases} x \in K \\ \frac{1}{2} a(x,x) - \varphi(x) = \min_{y \in K} \left\{\frac{1}{2} a(y,y) - \varphi(y)\right\} \end{cases}$

Cor 59 : (Lax-Milgram)
Soit a continue coercive. Alors :
$\forall \varphi \in H'$, $\exists!\, u \in H$, $a(u,v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H$

Appli 60 : $\Delta u = f \in L^2$ a une unique solution dans $H_0^1 := \{u \in L^2, \partial_i u \in L^2, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ de Hilbert pour :
$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$

C) Semi-groupes d'un evn complet X

Déf 61 : $(S(t))_{t \geq 0}$, famille d'opérateurs linéaires, est un semi-groupe de contraction si
(i) $S(0) = id_X$ (ii) $S(t+s) = S(t)\, S(s)$
(iii) $\|S(t) u\| \leq \|u\|$, $\forall t > 0$, $\forall u \in X$

Déf 62 : On pose $D(A) := \{u \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$ existe dans $X\}$
et $Au := \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$ pour $u \in D(A)$, appelé générateur de $(S(t))_{t \geq 0}$ de domaine $D(A)$.

Th 63 : Pour $u \in D(A)$: (i) $S(t) u \in D(A)$, $\forall t \geq 0$
(ii) $A S(t) u = S(t) Au$, $\forall t > 0$
(iii) $t \mapsto S(t) u$ est dérivable en tout $t > 0$ et
$$\frac{d}{dt} S(t) u = A S(t) u$$

Déf 64 : Si $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de A est l'opérateur
$R_\lambda := (\lambda Id - A)^{-1} : X \to X$.

Th 65 : (i) Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$ et $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$
(ii) Si $\lambda > 0$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt$ pour $u \in X$.

Th 66 : (Hille-Yosida) DV3
Soit A opérateur linéaire fermé, densément défini dans X.
Alors A génère un sg-c si : $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda$, $\forall \lambda > 0$

Ex 67 : L'équation $\partial_t u = \Delta u$ admet une solution sur $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, avec $H^2 = \{u \in L^2, \partial_i u \in L^2, \partial_{ij}^2 u \in L^2\}$

N° 205

Théorèmes de pt fixe ☺

Ens des compacts

$$T : \begin{cases} K \longrightarrow K \\ K \longmapsto \bigcup_{i=1} S_i(K) \end{cases}$$

Application contractante

Thm de pt fixe de Picard

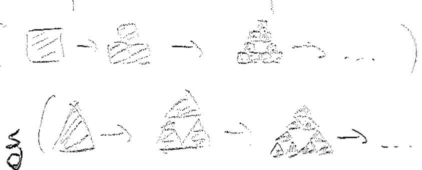
→ Un unique pt fixe

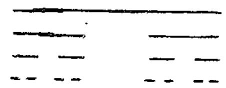
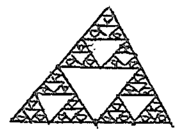
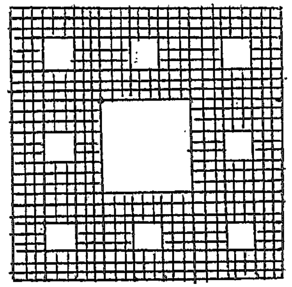
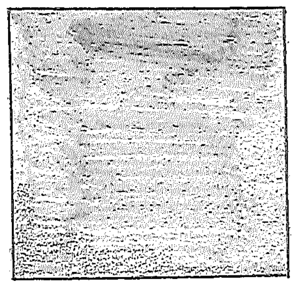
= itéré de la fonc°

= attracteur

Annexe

Et ce quelque soit le compact de départ

()

SFIs	Attracteur	Nomenclature
$S_1 : x \longmapsto \frac{1}{3}x$ $S_2 : x \longmapsto \frac{2+x}{3}$	étape 0 étape 1 étape 2 étape 3 ⋮ 	Espace triadique de Cantor
$S_i : x \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + b_i$, avec $b_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix}1/4\\1/2\end{pmatrix}$		Triangle de Sierpinski
$S_i : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + b_i$ avec $b_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix}$; $b_4 = \begin{pmatrix}0\\-1/3\end{pmatrix}$; $b_5 = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\end{pmatrix}$; $b_6 = \begin{pmatrix}0\\-2/3\end{pmatrix}$; $b_7 = \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix}$; $b_8 = \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\end{pmatrix}$		Carré de Sierpinski
Le même SFI que ci-dessus en rajoutant $b_9 = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix}$		Carré plein
$S_i : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + b_i$ avec $b_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}$; $b_4 = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$		

NiGNE Florian

LAVIGNE Florian

N° 205

DV1 : Compacts d'un complet (cas Revdf)

Th : Posons $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vide d'un $\mathbb{R}$evdf E. ev de dim finie.
Alors $(\mathcal{K}, d_H)$ est complet

Dem : Soit $(K_n)_n \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy.

1] $(K_n)_n$ est bornée

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N > 0$; $\forall n \geq N$, $d_H(K_n, K_N) \leq \varepsilon$.
Fixons $x_0 \in K_0$. Soit $x \in \bigcup_{n>N} K_n$: $\exists n > N$, $x \in K_n$.
Soit $\xi \in K_N$ avec $\xi = \pi_{K_N}(x)$. Alors :

$$\|x_0 - x\| \leq \|x_0 - \xi\| + \|x - \xi\|$$
$$\leq \max_{\xi \in K_N} \|x_0 - \xi\| + \underbrace{d(x, K_N)}_{\leq d_H(K_n, K_N) \leq \varepsilon}$$

Ainsi : $\bigcup_{n>N} K_n$ bornée. Comme les K_i sont bornées, $\bigcup_{n=0}^{N} K_n$ l'est aussi, d'où $\bigcup_{n\geq 0} K_n$ borné, puis (K_n) est bornée.

2] Lemme : Soit $A, B \in \mathcal{K}$. Alors $d_H(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$. $d(\cdot, A)$

Dém : $\leq$ Soit $a \in A$. Alors $|(d_A - d_B)(a)| = d_B(a)$
Donc $d_B(a) \leq \|d_A - d_B\|_\infty$ et $\max_A d_B \leq \|d_A - d_B\|_\infty$
De même $\max_B d_A \leq \|d_A - d_B\|_\infty$. Donc
$d_H(A,B) \leq \|d_A - d_B\|_\infty$.

$\geq$ Soit $x \in E$, $a \in A$, $b \in B$. Alors :
$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a)$
D'où $d(x, A) \leq d(x, b) + d(b, A) \leq d(x, b) + d_H(A, B)$
puis $d(x, A) - d(x, B) \leq d_H(A, B)$.
Par symétrie, on a : $|d_A - d_B|(x) \leq d_H(A, B)$
Enfin, $\|d_A - d_B\|_\infty \leq d_H(A, B)$.

3] Construction d'un compact "limite"

Posons $d_n = d_{K_n}$. Par le lemme, $(d_n)_n$ est de Cauchy.
Par complétude de $\mathbb{R}$ et critère de Cauchy appliqué à $(d_n)_n$.
$d_n \xrightarrow{\text{unif.}} \varphi$. Par cv uniforme, comme d_n est continue pour $n \in \mathbb{N}$
φ est continue. Posons $K = \varphi^{-1}(\{0\})$ fermé.
Soit $x \in K$. Alors $0 = \varphi(x) = \lim_n d_n(x)$. Ainsi $x \in \overline{\bigcup_{n\geq 0} K_n}$
qui est bornée. Donc K l'est.
Comme E est de dimension finie, K est compact.

4) $\underline{K \neq \emptyset}$ (ie $K \in \mathcal{K}$)

Soit $x_n \in K_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme (x_n) est bornée,

$x_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in E$. Alors :

$$\varphi(x) = \lim_n d_n(x) = \lim_{n,m} d_n(x_m)$$

$$= \lim_n d_n(x_n), \text{ par cv uniforme des } d_n.$$

$$= 0.$$

Donc $x \in K$.

5) $\underline{\varphi = d_K}$

Soit $y \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\xi_n \in K_n$ avec

$$\|y - \xi_n\| = d_n(y).$$

Quitte à extraire, $\xi_n \to \xi \in K$ [cf. 4)]

Par continuité, on a alors $\|y - \xi\| = \varphi(y)$.

Soit $x \in K$. Il existe $x_n \in K_n$, avec $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Ainsi
$$\begin{array}{ccc} d_n(y) & \leq & \|y - x_n\| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(y) & \leq & \|y - x\| \end{array}$$

Donc $\varphi = d_K$ et $K = \lim_n K_n$ [au sens de la distance de Hausdorff]

NE Florian

N-205

DV 1. Théorème de Stampacchia
(Brézis, Analyse Fonctionnelle)

Lemme : $|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2|$, $\forall f_1, f_2 \in H$.

Dém : Soit $u_i = P_K f_i$ Alors : $\langle f_i - u_i, v - u_i \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$.

On obtient $\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle, \langle f_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0$.

ou encore $\langle f_2 - f_1, u_2 - u_1 \rangle \geq \|u_2 - u_1\|^2$.

On conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dém de Stampacchia :

Par le théorème de représentation de Riesz :

* $\exists f \in H$ t.q. $\varphi = \langle f, \cdot \rangle$
* $\forall v \in H$, $\exists Av \in H$, $a(v, w) = \langle Av, w \rangle \ \forall w \in H$,
car $w \mapsto a(v, w)$ est linéaire.

Il est clair que $A : v \mapsto Av$ est linéaire.

L'inégalité voulue revient à chercher $u \in K$ avec (*) $\langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \ \forall v \in H$

Par continuité et coercivité de A, il existe $C, \alpha > 0$ tels que : $\forall v \in H$,

$$\|Av\| \leq C\|v\| \quad \text{et} \quad \alpha\|v\|^2 \leq \langle Av, v \rangle.$$

Soit $\rho > 0$ (qu'on fixera plus tard). Alors (*) revient à :

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u \rangle \leq 0$$

ou encore $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$

Soit $S : \begin{array}{l} H \to K \\ v \mapsto Sv = P_K(\rho f - \rho A v + v) \end{array}$. Mq S est une contraction.

Par le lemme, $\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq \|v_1 - v_2 + \rho A(v_2 - v_1)\|^2$

$$\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho \langle v_1 - v_2, A(v_1 - v_2) \rangle + \rho^2 \|A(v_2 - v_1)\|^2$$

$$\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\alpha\|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 C^2 \|v_2 - v_1\|^2$$

$$\leq K_\rho \|v_1 - v_2\|^2$$

pour $K_\rho = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2$ minimisé pour $\rho_m = \frac{\alpha}{C^2}$ avec $K_{\rho_m} = 1 - \frac{\alpha^2}{C^2} <$

Donc S est contractante.

Par le théorème de Banach, u existe et est unique.

MIGNE Florian

N°205

DV 3 : Théorème de Hille-Yosida
(Evans, PDEs, p418)

Soit $\lambda>0$. Posons $A_\lambda := -\lambda Id + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda$.

Montrons que $A_\lambda u \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Au$ pour $u\in D(A)$.

Comme $\lambda R_\lambda u - u = AR_\lambda u = R_\lambda Au$, on a :
$$\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \|R_\lambda\|\cdot\|Au\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Au\| \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $\lambda R_\lambda u \to u$ si $u\in D(A)$. Par densité de $D(A)$, comme $\|\lambda R_\lambda\|\leq 1$, on a $\lambda R_\lambda u \to u$ pour $u\in X$.

Si $u\in D(A)$, on a : $A_\lambda u = \lambda A R_\lambda u = \lambda R_\lambda Au \longrightarrow Au$.

Définissons $S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t}\cdot e^{t\lambda^2 R_\lambda} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^k}{k!}R_\lambda^k$.

Comme $\|R_\lambda\|\leq 1/\lambda$, $\|S_\lambda(t)\|\leq e^{-\lambda t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1$.

Ainsi $\{S_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction de générateur A_λ avec $D(A_\lambda)=X$.

Soit $\lambda,\mu>0$. Comme $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, on a $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$.

Ainsi $A_\lambda S_\mu(t) = S_\mu(t) A_\lambda$ pour $t\geq 0$. Soit $u\in D(A)$. Alors :
$$S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}\left[S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u\right]ds = \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)[A_\lambda - A_\mu]u\,ds$$
Donc $\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \underset{\lambda,\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $S(t)u = \lim S_\lambda(t)u$ existe pour $t\geq 0$, $u\in D(A)$.

Comme $\|S_\lambda(t)\|\leq 1$, $S(t)u$ existe pour $u\in X$ uniformément pour t dans un compact de $\mathbb{R}_+^*$. On vérifie que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un s.g.c.

Soit B le générateur de $\{S(t)\}$ et $u\in D(A)$. Alors :
$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \leq \|S_\lambda(s)\|\cdot\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s)-S(s))Au\| \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
Or $S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u\,ds$. Par passage à la limite :
$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Au\,ds$ si $u\in D(A)$. D'où $D(A)\subseteq D(B)$ et pour $u\in D(A)$, $Bu = Au$. Soit $\lambda>0$. Donc $\lambda\in \rho(B)\cap\rho(A)$.

Donc $(\lambda Id - B)(D(A)) = (\lambda Id - A)(D(A)) = X$. Donc $D(A)=D(B)$, puis $A=B$.