

NOM : FROT

Prénom : Robin

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 203 Application de la Notion de compacité

Autre sujet :

axiome de
Borné-éloigné

si K est séparé de $\mathbb{R}^n$

I Définitions et premières propriétés

a) Borné-éloigné, topologique

1- Définition : Soit E un espace topologique

soit une partie de E . K est dite

compacte si pour toute famille d'ouverts

$(U_i)_{i \in I}$ tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe

une partie finie $J \subset I$ telle que $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$

2- Proposition : Toute partie fermée d'un compact

est compacte

3- Propriété : Soit K un espace compact et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$

une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$

qui converge simplement vers une fonction f .

Si la suite est équiréglée, la convergence

est uniforme.

4- Développement : Soit K un espace

compact. Les morphismes d'algèbre

de $C^0(K, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement

les morphismes d'évaluation

5- Propriété : Un espace métrique est

compact si et seulement si toute

suite de E admet une valeur d'adhérence.

6- Théorème : Soient (E_n, d_n) des

espaces métriques compacts,

le espace produit $\prod_{n \geq 0} E_n$ est compact

pour la distance $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$

II Fonctions continues sur un compact

a) Continuité

7- Propriété : L'image d'un compact

par une application continue

est compacte

8- Théorème : Soit E un espace vectoriel

normé. La boule unité $B_{E,1}$ est

compacte si et seulement si $\dim E < +\infty$

9- Corollaire : Les parties compactes

de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermés bornés.

10- Corollaire : Si K est compact et

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est

borné et atteint ses bornes.

11- Théorème : L'image d'un segment

de $\mathbb{R}$ par une fonction continue

est un segment

12- Soit $I = [a, b]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

et dérivable sur I . Si $f(a) = f(b)$ alors

il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$

Jury :

Prénom :

NOM :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

13 - Théorème Soit $I =]-\alpha, \alpha[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I . Alors il existe $c \in I$ tel que $f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha - \beta)f'(c)$.

• B) Continuité uniforme.

14 g - Théorème ~~Une~~ Une fonction continue d'un compact métrique dans un espace métrique est uniformément continue.

15 Application Une suite de fonctions croissantes d'un ~~segment~~ segment de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue converge uniformément.

C) Application aux théorèmes de point fixe

16 - propriété Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \rightarrow E$ continue telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f possède un unique point fixe α . De plus si $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α .

Hm de pl fixe de Brouwer

17 Théorème Soit $n \geq 1$ et $f : B_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ continue. alors f a un point fixe.

18 lemme Soit $K = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}^2$ et $h : [-1, 1] \rightarrow K$ et $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\begin{cases} h_x(-1) = x_1 \\ h_x(1) = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} h_y(-1) = y_1 \\ h_y(1) = y_2 \end{cases}$ alors $h : [-1, 1] \cap g([-1, 1]) \neq \emptyset$

19 lemme Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue et injective. On note $\gamma = f(S^1)$. On a alors que $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ possède une seule composante connexe non bornée. Si de plus $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ n'est pas connexe, γ est la frontière des composantes connexes.

Théorème Avec les notations précédentes, $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ possède deux composantes connexes dont une est et bornée.

DVT
→ ②

DVT
→ ③

admis

Hm de Jordan

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

<u>III) Espaces de fonctions sur les espaces compacts</u> a) Parties denses 21 - Lemme : Il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ qui converge uniformément vers $x \mapsto x$ sur $[-1, 1]$ 22 - Définition : Une partie A de $\mathcal{C}(E, F)$ où E et F sont des espaces métriques) sépare les points si $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$ 23 - Théorème de Stone-Weierstrass Soit K un espace métrique compact. Une sous algèbre unitaire de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ qui sépare les points est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ 24) Corollaire : Soit K un espace métrique compact. Une sous algèbre unitaire de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ qui sépare les points et qui est stable par conjugaison est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$	b) Parties compactes 25) Théorème Soit K un espace métrique compact et F un espace métrique. Une partie $A \in \mathcal{C}(K, F)$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équirécontinue. 26) Théorème 26 Théorème Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(V)$ les fonctions holomorphes sur V. $K \subset \mathcal{H}(V)$ est compact si et seulement si il est fermé, borné,
--	---

Def: $1 \Leftrightarrow (F_\alpha), \bigcap F_\alpha = \emptyset$.

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \bigcap F_{\alpha_i} = \emptyset$$

Prop. $\emptyset \neq F_n$ fermés d'un compact $F_{n+1} \subset F_n$
alors $\bigcap F_n \neq \emptyset$

$$(\subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F_{\max(n_i)})$$

Théorème f continue (X, d) métrique $\rightarrow (Y, \rho)$ métrique.

[Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d(x, y) \leq \eta \rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

dém: $\varepsilon/2, \forall x, \exists \eta_x, \forall y \in B(x, \eta_x)$.

$$\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon/2.$$

$(B(x, \eta_x))$ recouvrement.

compact $\rightarrow (B(x_i, \eta_{x_i}))$ recouvrement fini extrait.

$$\eta = \min \frac{\eta_{x_i}}{2}$$

Soit $x, \exists x_i, x \in B(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2})$ soit $y, d(x, y) \leq \eta$
 $d(y, x_i) \leq \frac{\eta_{x_i}}{2} + \eta \leq \eta_{x_i}$.

$$\rightarrow \rho(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$$

$$\rho(f(y), f(x_i)) < \varepsilon/2$$

+ ineq triang.

Léon 203: Ultra° de la no° de compacité

I. Dév. 2: Hm du pt fixe de Bauer (H)

On sup. le h.m. vrai si $f: D^n \rightarrow B^n \subset \mathbb{R}^n$

① $A \subset C^0(B^n, \mathbb{R})$

$$- x \mapsto 1$$

- A sépare les pts $x_0 \neq y_0$.

$\exists f$ affine tq $f(x_0) = 0, f(y_0) = 1$.

$$\hookrightarrow x \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i + b, \quad a_i \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{\sum (x_i - x_{0i})}{\sum (y_{0i} - x_{0i})}$$

polynôme

$$\hookrightarrow \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} X_j^{a_j}, \sum f_j X_j \right\}$$

② Soit $\varepsilon > 0$

$\exists P$ forme poly. tq $\forall x \in B^n, \|f(x) - P(x)\| \leq \varepsilon/2$

$$\forall x, \|P(x)\| \leq \|P(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq 1 + \varepsilon/2$$

Soit Q tq $\forall x, Q(x) = \frac{1}{1 + \varepsilon/2} P(x)$ (pour un certain ε_0)

Si f n'a pas de pt fixe, $\mathcal{N}_\varepsilon = \{x \in B^n, \|f(x) - x\| \geq \varepsilon\}$

$$B^n = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{N}_\varepsilon$$

$$\exists (e_1, \dots, e_n), B^n = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{N}_{\varepsilon_i} \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2} \min(e_1, \dots, e_n)$$

Idée pour conclure: Q proche de f à $\varepsilon_0/2$ près, et f loin de 1 à $\varepsilon_0/2$ près (strict)

II Questions

- dit. $\left\{ \begin{array}{l} - \text{ Dans le der, utilisat° du résultat pour / P¹ } \\ \text{Cmt ça se démontre ?} \end{array} \right.$
- Sone - Vétérinaire
- Thm 23 (Dini) : cmt il se démontre ? Où intervient la compacité ?
 - Rappel def compact ? oubli de K séparé de $\mathbb{R}^1$
 - Cmt on montre prop 2 (partie fermée d'un compact est compact)
 - Partie compacte d'un espace topologique est-elle fermée ?
 - ↳ oui
 - thm 6. pourquoi intéressant : str. imp. m. topol ?
 - prop 7. hys vrai ?
 - ↳ faut que l'espace d'arrivée soit séparé
 - cmt on démontre le thm 8 ?
 - exercice 12
 - cmt on montre le thm de Heine (thm 14)
 - ↳ $f: E \rightarrow F$ Soit $\varepsilon > 0$ $\in E$
 - $\forall x \in E, \forall \eta > 0, B_{x,\eta} = \{y, \|x-y\| \leq \eta, \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon\}$
 - $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \eta > 0}} B_{x,\eta}$ $\leftarrow$ Couverts
 - nom du thm 25 ? $\rightarrow$ Ascoli
 - " " " 26 ? $\rightarrow$ Montel
 - application ?
 - topologie $\mathcal{T}(U)$?

III. Exercices

ex. 12.13

① // $f: X \rightarrow K$ compact f continue si $\Gamma(f)$ fermé.

- Si K pas compact: c-exemple?

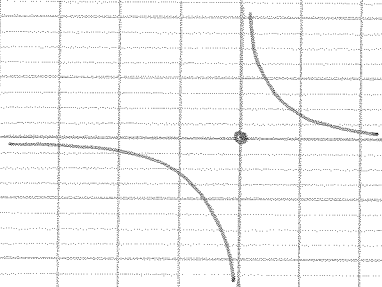
- Si $\Gamma(f)$ fermé dans $X \times K$,

$\hookrightarrow$ topologie? = points / limite, en chose!

- $\Rightarrow$: une facile (je meui si K pas compact)

fonc° 1/2e pr $x \neq 0$ et 0 pour $x = 0$

$\Gamma(f)$ est fermé



$$(x_n, \frac{1}{x_n}) \rightarrow (y, 0)$$

$$x_n \times \frac{1}{x_n} = 1 \quad (y, \frac{1}{y})$$

$$y \cdot y = 1$$

Coveries : (1) E
(2) queue
(3) finie

IV. Rys

- Dnt 2 $\rightarrow$ pas bien (trop de heures admis, on peut les, ...)
- Des résultats qu'on ne peut pas éviter
 - $\hookrightarrow$ thm de Rolle et de Weier

obtenir le thm de la borne sup

- Rapport du jury : conseil de faire un pft de dpts + rappels
 - $\hookrightarrow$ permet de classer les props et ensuite de regrouper les appliques selon les props utilisées
- Eventiel de connaître la def de compact par un ex. topo (Bol-Weierstrass)

- Plan :
 - ① Rappels
 - ② Bol-Weierstrass
 - ③ Suite / BW, (Espace des normes)
 - ④ Article (appli) Cauchy, Peano