202

NOM : BECQUET **Prénom :** Antoine **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Exemples de parties denses et applications.

Autre sujet :

I Densité : définition et exemples

1) Définition, théorème fondamental

On se fixe un espace métrique X et A une partie de X.

(Def 1) On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$. Cela est équivalent à dire que tout ouvert de X rencontre A. $\neq \emptyset$ ⚠

(Th 2) Soit Y un espace métrique, f et g deux fonctions continues $X \to Y$. On suppose A dense dans X. Alors $f_{|A} = g_{|A} \Rightarrow f = g$. (vrai pr Y séparé, X qcque)

(Co 3) Toute fonction $f : A \to Y$ continue admet un unique prolongement sur X. Faux. il faut l'uniforme co pour que le prolongement existe ! (C-ex : $\sin(1/x)$ en 0)

2) Exemples sur $\mathbb{R}$

(Prop 4) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$

(Cor 5) $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

(App 6) Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. disjoints

(App 7) Le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est Id.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(0) = 0$ $f(1) = 1$

$f(a+b) = f(a) + f(b) \to f_{|\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$

$f(ab) = f(a)f(b) \to f_{|\mathbb{Q}} \to f_{|\mathbb{Q}} + C^0$

$\Rightarrow = \mathbb{Q}$ à homeomorf près (?)

$\triangleright \mathbb{R}$ par un objet simple.

des difficultés ici ! (on a vu ... ensemble)

(Prop 8) L'ensemble des nombre dyadiques $D = \{ \frac{a}{2^b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \}$ est dense dans $\mathbb{R}$

(App 9) Soit E un $\mathbb{R}$ev et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. Alors f convexe.

(Prop 9) Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. Alors ou bien $G = \alpha\mathbb{Z}$ pour un certain $\alpha > 0$, ou bien G dense dans $\mathbb{R}$.

(App 10) $\{ \cos(n), n \in \mathbb{Z} \}$ est dense dans $[-1, 1]$.

3) Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(Prop 11) $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(App 12) $D\det(A)(H) = Tr(co(A)^T H)$ pour tout $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(App 13) $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(Prop 14) $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(App 15) $Vect(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Idée générale : on montre qq chose d'abord sur une partie dense puis on élargit de ... densité.

Bien

est-ce que vraiment ds la leçon ?

II Densité et complétude

1) Théorème de Baire, applications

(Def 16) Soit E un espace métrique. On dit que E est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

(Prop 17) Cette définition est équivalente à dire que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(Th 18, de Baire) Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

(App 19) Un evn à base dénombrable n'est pas complet.

(App 20 théorème de l'application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective. T est est une application ouverte (Si U ouvert de E, $T(U)$ ouvert de F)

(Cor 21, théorème de Banach) Si $T : E \to F$ linéaire, continue, bijective alors T^{-1} continue.

2) Bases hilbertiennes.

(Def 22) Soit H un espace de Hilbert. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de H est appelée base hilbertienne de H si elle est orthonormale et totale, c'est à dire que $\text{vect}(a_i)_{i\in I}$ est un sev dense de H.

(Ex 23) $(\delta_i^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(u_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum_{i\in\mathbb{N}} |u_i|^2 < +\infty\}$ muni du p.s $(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \overline{y_i}$.

(Prop 24) Si H est séparable, c'est à dire qu'il admet une famille dénombrable dense, alors H admet des bases hilbertienne

(Th 25) Soit H un espace de Hilbert séparable et (e_n) une famille orthonormale de H alors les prop suivantes sont équivalentes

(i) (e_n) est une base hilbertienne

(ii) $\forall x \in H \quad x = \sum (x, e_i) e_i$

(iii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum |(x, e_i)|^2$

(iv) $(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$

(App 26) On définit $L^2(\mathbb{T})$ comme l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique modulo la relation λ-pp, de carré intégrable, muni du p.s. $(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}$. $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert (ADMIS) et on verra à la partie suivante que les polynômes trigonométriques $(e_k : t \mapsto e^{ikt})$, $k \in \mathbb{Z}$ en forment une base hilbertienne.

manque d'exples

DEV 1

III Approximation dans les espaces fonctionnels

1) Fonctions continues sur un segment

On considère l'espace des fonctions continues d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. $C^0[a,b]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

(Def 27) On définit les polynômes de Bernstein par $B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

(Prop 28, théorème d'approximation de Bernstein) Soit $f \in C^0[a,b]$. On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_k^n(x)$. Alors $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$

(Cor 29, théorème de Weierstraß n°1) L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $C^0[a,b]$.

(App 30) Si $f \in C^0[a,b]$ est telle que $\forall p \in \mathbb{N}$ $\int f(t) t^p dt = 0$, alors $f = 0$.

(Prop 31, théorème de Fejer) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique et continue. Pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $e_k : x \mapsto e^{ikx}$ et on définit :

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad C_n = \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1}$$

où $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ les coeff de Fourier de f.

Alors $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément.

(Cor 32, Théorème de Weierstraß n°2) L'ensemble des polynôme trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, 2π-périodique, pour la norme uniforme.

2) Densité dans L^p

DEV 2

avec $(X, \mathcal{A}, \mu)$ esp. mesuré :

* Dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

(Prop 33) L'ensemble S des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A \in L^p$ est dense dans L^p.

* Dans $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$;

(Prop 34) L'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ est dense dans L^p pour $p < \infty$.

(App 35) Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ et $\tau_h : L^p \to L^p$ définie par $\tau_h(f)(x) = f(x+h)$. τ_h est continue.

(Remarque finale) En remarquant que $\|f\|_{L^2} \leq 2\pi \|f\|_\infty$ dans le cas des fonctions 2π périodiques on obtient grâce à la densité des fonctions continues ds L^2 le résultat annoncé en (App 26)

- Thm 25. C'est quoi les (i), (ii), ... ? (2)

- Prop 24. Si H séparable alors il admet une base hilbertienne.
Et si H pas séparable ?

↳ "Je crois" que vrai aussi mais bs d'utiliser le lemme de Zorn alors que la preuve constructive :

(x_n) suite dense ds H. $A = \{x_n\}$

$B_0 = (x_0)$

$B_{n+1} = \begin{cases} B_n & \text{si } x_{n+1} \in \text{Vect } B_n \\ B_n \cup \{x_{n+1}\} & \text{sinon} \end{cases}$

$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$y \in H$ et $y_n \to y$ où $y_n \in A \; \forall n$.

$\forall n \; \exists m \; y_n = x_m \in \text{Vect}(B_m) \subseteq \text{Vect}(B)$

$(y_n) \in \text{Vect}(B)^{\mathbb{N}} \to y$.

Donc B base totale. Reste à l'orthonormaliser.

Hilbert ⇓ Gram-Schmidt

Qu'est-ce que vous connaissez comme Hilbert séparable ?

↳ $\mathbb{C}^n$, $\ell^2(\mathbb{N})$ ($\{(u_n)$ nulle à partir d'un certain rg$\}$ est dense)
$u_i \in \mathbb{Q}$

- App 26. Dem.

↳ Rajouter $1/2\pi$ ds la déf du ps

- App 30. D'autres applis de Weierstrass ?

- Prop 31 (thm de Fejer). Dem ?

(I) Questions

- Def 1. Équiv à quoi que la partie est dense ? Pquoi c'est vrai ?

↳ ∀ ouvert de X rencontre A.

$\bar{A}$ = l'adhérence de A = le + plt fermé contenant A
= l'adhérence des suites
↖ métrique.

⚠ ∀ ouvert ≠ ∅.

- Thm 2 Pas vrai si Y pas métrique.

↳ ? Ils thm cool à démontrer av la caractérisa° séquentielle :

Soit $x \in X$. Par densité $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $a_n \to x$. $f(a_n) \to f(x)$
$g(a_n) \to g(x)$

- Prop 4 Dem ?

↳ Se base s/ le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$: dvt décimal de x.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ?

- App 6 On peut pas faire mieux ?

↳ disjoints dem :

$\mathcal{U}$ ouvert. $\mathcal{U} = \coprod_{C \in \mathcal{C}} C$ décomposition en classes de connexité

($x \sim y$ si $[x,y] \subseteq \mathcal{U}$ est une relation d'équiv).

$C \in$ l'ouvert. $\mathbb{Q}$ dense dc rencontre C.

Cmt on montre que les connexes sont les intervx.

↳ ?

- App 12 Cmt on utilise la densité.

↳ on montre le résultat s/ Gl_n puis comme les fonc° sont C^0 et que Gl_n est dense l'égalité est vraie s/ $\mathcal{M}_n$.

- Thm 18 (Thm de Baire) Dem ?

↳ ?

- App 20 Dem ?

↳ ?

(II) Exercices

$\boxed{1}$ Soient A, B denses dénombrables dans $\mathbb{R}$.

Mq $\exists\, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homéomorphisme tq $h(A) = B$ et $h(B) = A$

→ fonc° C^0 de réciproque C^0
⚠ pas un morphisme

(a_n) décrit A.
(b_n) décrit B.

$a_0 \mapsto b_0$

$a_1 \mapsto b_{i_1}$ où $\begin{cases} \text{si } a_1 > a_0, & i_1 = \min\{i,\ b_i > b_0\} \\ \text{si } a_1 < a_0 & i_1 = \min\{i,\ b_i < b_0\} \end{cases}$

Par réc. soient $m_1, m_2 < n$ tq $a_{m_1} < a_n < a_{m_2}$ les + proches (s'ils existent). Alors on prend le + pt i ($\notin \{i_1, \dots i_{n-1}\}$ non nécessaire c'est forcé vérifié) tq. $h(a_{m_1}) < b_i < h(a_{m_2})$ (existe par densité).

$h : A \to B$ bij

h injective par construc°
h surjective (si b_n pas atteint (pour le min), alors par densité de A ...)

On aimerait h uniformément C^0 (pr le prolongement, cf. cor 3), mais ce n'est pas la bonne idée.

On pose $\tilde{h}(x) = \sup\{h(a),\ a \in A,\ a \leq x\}$.
Si $x \in A$, $\tilde{h}(x) = h(a)$.

Une appli ↗ d'image dense est forcément C^0 !!

h est C^0 sinon elle saute et c'est pas surj

[⚠ Ne pas oublier que la topo de $\mathbb{R}$ c'est celle de l'ordre]

III) Commentaires

- Structurer différement la leçon pr en faire une leçon d'exple (même si c'est pour mettre le m̃ contenu)
- Pas mal d'imprécisions voire d'énoncés faux !! ⚠ ⚠
- $\mathbb{Q}$ dense ds $\mathbb{R}$: Bs de se baser s/ une certaine construc°
  Archimédien : une bonne idée. $(\forall x, \forall y > 0, \exists n, ny > x)$.
  ↳ se montre bien ds la plupart des construc°
- Hilbert séparable $\Longleftrightarrow$ avoir une base hilbertienne dénombrable (ou finie).
  En avoir conscience !!
  ↳ aide pr les exples
- Les espaces séparables auraient pu avoir leur place ds cette leçon
  ↳ = admet une partie dense dénombrable.
  Après faut savoir qd on s'en sert.
  Difficultés s/ les espaces séparables :
  * partie d'un espace séparable est séparable ?
    vrai ds les espaces métriques ms dem ?
    (utiliser que ds cas métrique séparable ⟺ être à base dénombrable d'ouverts)
    ms faux en général.

IV) Dques élts

DEV 1 Polynômes d'aprox de Bernstein

Dev 1 1/2 (ccl)

On déf $B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^k$ et pour $f \in C^0[0,1]$, $P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_k^n$

Alors $P_n \xrightarrow[\|.\|_\infty]{} f$.

↳ on se place s/ [0,1] (exten° à [a,b] par translat°)

1) Calcul préliminaire : calcul de $\sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n} - x)^2 B_k^n(x)$

2) Une majoration : $\exists \eta > 0, \forall x \in I = [0,1]$ $\sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \eta} B_k^n(x) \leq \frac{1}{n\eta^2}$

3) Conclusion.

1) On note X^2, X et $\mathbb{1}$ les fonctions $x \mapsto x^2, x, 1$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_k^n(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 B_k^n(x)}_{P(X^2)(x)} - 2x \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_k^n(x)}_{P(X)(x)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)}_{P(\mathbb{1})(x)} . x^2$$

Calculons $P(\mathbb{1})$, $P(X)$ et $P(X^2)$.

On note $F(a,b) = (a + (1-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-b)^{n-k}$

de sorte que $P(\mathbb{1})(x) = F(x,x) = 1$, puis avec

$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k a^{k-1} (1-b)^{n-k}$ on obtient.

$$P(X)(x) = \frac{x}{n} \frac{\partial F}{\partial a}(x,x) = \frac{x}{n} \cdot n(x + 1 - x)^{n-1} = x$$

Puis en dérivant une nouvelle fois :

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a \frac{\partial F}{\partial a}\right)(a,b) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum \binom{n}{k} a^k (1-b)^{n-k} . k\right) = \sum \binom{n}{k} k^2 a^{k-1} (1-b)^{n-k}$$

et $P(X^2)(x) = \frac{x}{n^2} \frac{\partial}{\partial a}\left(a \frac{\partial F}{\partial a}\right)(x,x) = \frac{x}{n^2} \frac{\partial}{\partial a}\left(an(a + (1-b))^{n-1}\right)_{|(x,x)}$

$$= \frac{x}{n^2}\left(n(a + (1-b))^{n-1} + a n(n-1)(a + (1-b))^{n-2}\right)_{|(x,x)}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{x^2(n-1)}{n} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_k^n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$.

(2) Ecrivons maintenant $\displaystyle\sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\eta} B_k^n(x) \leq \frac{1}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_k^n(x)$

$$= \frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{\eta^2 n}.$$

qui est bien l'inégalité voulue.

(3) On va approximer f par $P(f)$:

f étant continue sur I compact, elle est borné et unif. continue : * $\forall x\in I \ |f(x)|\leq M$, $M>0$

* $\forall \varepsilon>0 \ \exists \eta>0$, $|x-x'|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

Soit donc $\varepsilon>0$ et le η correspondant. On a.

$$|P_n(f)(x) - f(x)| = |P_n(f)(x) - \underbrace{P(\mathbb{1})(x)}_{\cdot f(x)}| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| . B_k^n(x)$$

On coupe la somme en 2 :

$$|P_n(f)(x)-f(x)| \leq \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\eta} \underbrace{\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|}_{<2M} B_k^n(x) + \sum_{|\frac{k}{n}-x|<\eta} \underbrace{\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|}_{<\varepsilon} B_k^n(x)$$

$$\leq \frac{2M}{\eta^2 n} + \varepsilon\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} B_k^n(x)\right)}_{=1} . \leq \frac{2M}{\eta^2 n}.$$

Ainsi pour $n \geq \frac{2M}{\eta^2}$ on a $|P(f)(x)-f(x)| \leq 2\varepsilon \ \forall x\in I$.

donc $\|P_n(f)-f\|_\infty < 2\varepsilon$

$\|P_n(f)-f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\square$