

NOM : UMBER

Prénom : Pierre

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Espaces de fonctions: exemples et applications.

Autre sujet : \

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. <u>I. L'espace fonctionnel $\mathcal{C}^0(X)$</u> <u>1) Définitions et topologie</u> On considère (X, d) un espace métrique compact. <u>Def 1.</u> Soit $(E, \ \cdot\)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{C}^0(X, E)$ les fonctions continues de X dans E. On pose $\mathcal{C}^0(X) := \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$. <u>Prop. 2:</u> Si $f \in \mathcal{C}^0(X, E)$, f est bornée. On pose alors $\ f\ := \sup_{x \in X} \ f(x)\$ <u>Prop. 3 :</u> $(\mathcal{C}^0(X, E), \ \cdot\)$ est un espace vectoriel normé (c.v.n). <u>Prop. 4 :</u> Si E est un Banach, alors $\mathcal{C}^0(X, E)$ est un Banach. L'espace $\mathcal{C}^0(X)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach unifiée commutative <u>App 5:</u> Si $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est $\mathcal{C}^0$ et localement lipschitzienne en la seconde variable, alors le problème de Cauchy donné par $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ (t_0, y_0) \in U \end{cases}$, admet une solution locale, et si $(t, y), (t, \psi)$ sont deux solutions, elles coïncident sur $I \cap J$ (Théorème de Cauchy-Lipschitz) <u>Def 6:</u> Si $f_m, f \in \mathcal{C}^0(X, E)$, on dit que (f_m) converge simplement vers f si, $\forall x \in X, f_m(x) \rightarrow f(x)$, et uniformément si $\ f_m - f\ \rightarrow 0$.	<u>Prop 7.</u> Si $f_m \rightarrow f$ uniformément, alors $f_m \rightarrow f$ simplement <u>Th. 8 (Dini)</u> On suppose $K = \mathbb{R}$, $f_m, f \in \mathcal{C}(X)$. Si $f_m \rightarrow f$ simplement et $m \mapsto f_m$ est croissante, alors $f_m \rightarrow f$ uniformément. (*) <u>2) Parties relativement compactes.</u> <u>Def 9.</u> Soit $H \subset \mathcal{C}^0(X, E)$. H est équicontinue si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in H, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \Rightarrow \ f(x) - f(y)\ < \varepsilon$ <u>Th 10 (Ascoli):</u> Soit $H \subset \mathcal{C}^0(X)$. Alors H est compact ssi H est bornée, fermé et équicontinue <u>Ex 11:</u> L'opérateur $T: \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$ $f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$ est compact. <u>App 12 (Cauchy-Peano):</u> avec la notation de App. 5, si f est seulement $\mathcal{C}^0$, on a alors existence locale du problème de Cauchy. <u>Ex 13.</u> Il n'y a pas unicité des solutions. Si l'on considère $\begin{cases} y' = 3 y ^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, alors $t \in \mathbb{R} \mapsto 0$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$ sont deux solutions. <u>3) Parties denses</u> <u>Lemme 11.</u> On définit $u_n = 0$ et $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2^n} (t - \frac{1}{n})^2$ suite dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Alors (u_n) converge uniformément vers $t \mapsto t^2$.
--	---

Ref: Zúñiga-Walig, éléments d'analyse pour l'ingénieur

Rudin (analyse fonctionnelle)

Y. Ikenaga, Topologie, espaces fonctionnels

Rouvière, PGC

Laurel, analyse complexe

1/4

21*

Th. 15 (Stone-Weierstrass): Soit $A \subset C^0(X)$ une sous-algèbre unifère, stable par l'involution $f \mapsto \bar{f}$ si $K = \mathbb{C}$, qui sépare les points ($x \neq y \Rightarrow \exists f \in A, f(x) \neq f(y)$). Alors on a $\overline{A} = C^0(X)$.

Cor. 16: Les fonctions de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ peuvent être approchées uniformément par des fonctions polynomiales. Les fonctions polynomiales complexes on les variables z et $\bar{z}$ définies sur $K \subset \mathbb{C}$ compact est dense dans $C^0(K, \mathbb{C})$.

App. 17: Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues 2π -périodiques.

(*) Def 1: Soit K_1, K_2 deux compacts métriques. Alors K_1 et K_2 sont homéomorphes si les K -algèbres unifères $C^0(K_1)$ et $C^0(K_2)$ sont isomorphes.

II. Espace de fonctions intégrables.

1) définitions et topologies.

Soit (E, ε, ρ) espace mesuré, $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Def 18: Soit $f: E \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable. On pose alors:

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f|^p d\rho \right)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty, \quad \|f\|_p := \inf \{M \in [0, +\infty], \rho(\{f > M\}) = 0\}$$

$$\text{si } p = \infty, \quad \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p d\rho \right)^{1/p}$$

Def. 19 (Hölder): Soit $f, g: E \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables, alors $\int_E f g d\rho \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Prop 20 (Minkowski): Soit $f, g: E \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables, alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Def 21: On pose $L^p(E) := \{f: E \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable}, \|f\|_p < \infty\}$ où $f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ p.p.}$

Prop 22: $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ est un e.v.m.

Th 23 (Riesz-Fischer): $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet. La démonstration donne:

Prop 24: Si $f_n, f \in L^p$, avec $f_n \rightarrow f$ dans L^p , alors il existe (a.e.) une sous-suite telle que $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p. Si $p = +\infty$, on a même $f_n \rightarrow f$ uniformément p.p.

Prop 25: Soit $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, $f_n \rightarrow f$ p.p. Tel qu'il existe $g \in L^p(E)$, $\forall n, |f_n| \leq g$. Alors $f_n, f \in L^p$ et $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

2) Parties denses

Prop 26: L'ensemble des combinaisons K -linéaires de χ_A , avec $A \in \mathcal{E}$ et $\chi_A \in L^p$, est dense dans L^p .

Prop 27: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Alors $C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour $p < \infty$ (muni de la norme de Lebesgue).

App. 28: On munit $\mathcal{L}_b$ l'espace de $L^p(\mathbb{R}^d)$ donné par $f \mapsto (x \mapsto f(x-b))$ où $b \in \mathbb{R}^d$. Alors on a $\lim_{b \rightarrow 0} \|\mathcal{L}_b f\|_p = \|f\|_p$ ($p < \infty$)

App. 29 (Plancherel): La transformée de Fourier réalise une isométrie de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 pour $\|\cdot\|_2$, donc se prolonge en une isométrie de L^2 . De plus, cette isométrie est bijective.

Prop 30: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, et $p \leq \infty$. On pose $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ alors $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^p(\Omega)$

App 31 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

• Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$, où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f

• Si $f \in L^1([0, 2\pi])$, prolongée en une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \sin(mf) = 0$, où $\sin(mf)$ est la coefficient de Fourier de f d'ordre m .

3) Lien avec les espaces de Hilbert

Th 32: L'espace $L^2(E)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_E f \bar{g}$.

Th 33: Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors $\mathcal{H}$ est isométrique à un $L^2(I)$, où I est un ensemble.

Prop 34: On munit $L^2([0, 2\pi])$ du produit scalaire usuel $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$. Alors, si $\varphi_m: t \mapsto e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$, (φ_m) est une base de Hilbert de $L^2([0, 2\pi])$.

Ex 35 (formule de Bessel-Parseval): Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, alors $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)|^2$.

III. Exemples d'espaces non normables

1) Espaces de fonctions régulières

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, (K_m) suite exhaustive de compact, $\Omega = \bigcup K_m$ et $K_0 \subset K_{m+1}$, et $k \in \mathbb{N}$.

Def 36: On définit $C^k(\Omega)$, en posant $\rho_m(f) := \max_{|s| \leq k} \| \partial^s f \|_{0, K_m}$, et l'on pose $d(f, g) := \sum_{m \geq 0} 2^{-m} \frac{\rho_m(f-g)}{1 + \rho_m(f-g)}$.

Prop 37: la distance d exprime la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$.

Prop 38: $(C^k(\Omega), d)$ est complet non normable.

Def 39: sur $C^\infty(\Omega)$, on pose $\rho'_m(f) := \max_{|s| \leq m} \| \partial^s f \|_{0, K_m}$ et l'on pose $d'(f, g) := \sum_{m \geq 0} 2^{-m} \frac{\rho'_m(f-g)}{1 + \rho'_m(f-g)}$.

Prop 40: la distance d' exprime la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées partielles.

Prop 41: $(C^\infty(\Omega), d')$ est complet, non normable, et vérifie la propriété de Baire - Baire: Soit $A \in C^\infty(\Omega)$, alors A est relativement compactssi $\forall m, \rho_m(A)$ est bornée.

2) Espaces de fonctions holomorphes

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, on note $O(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω , que l'on munit de la convergence uniforme sur tout compact.

Prop 42 (Cauchy): Soit $f \in O(\Omega)$, $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$, $R > 0$, alors: $\forall m \geq 0, f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz$.

Th 43 (Weierstrass): Soit $f_p \in O(\Omega), f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que $f_p \rightarrow f$ uniformément sur tout compact. Alors $f \in O(\Omega)$ et, $\forall R, f_p^{(R)} \rightarrow f^{(R)}$ dans $O(\Omega)$.

Prop 44: $O(\Omega)$ est complet.

Th 45-Dini (Montel). Soit $H \subset O(\Omega)$.

alors H est relativement compactssi pour tout compact $K \subset \Omega$, la famille $\{f|_K\}_{f \in H}$ est bornée pour la distance uniforme. Une telle famille est dite normale,

d'adhérence compacte

DEV 2

Annexe : Tableau récapitulatif.

Espace de fonctions	convergence	partie dense	partie compacte
$C^0(X)$, X métrique compact	- uniforme $\Rightarrow$ simple - si $K = \mathbb{R}$, $m \mapsto f_m$ continue $\Rightarrow f_m \rightarrow f$ uni. $f_m \rightarrow f$ simplement	$H \subset C^0(X)$ sous-algèbre unifiée, inductive si $K = \mathbb{C}$ qui sépare les points	$H \subset C^0(X)$ bornée fermée et épicontinue
$L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert	$f_m \rightarrow f$ dans $L^p \Rightarrow \int_{\Omega} f_m \rightarrow \int_{\Omega} f$ p.p. $\{f_m \rightarrow f \text{ p.p.} \Rightarrow f_m \rightarrow f \text{ dans } L^p\}$ domination par $g \in L^p$	$C_c^0(\Omega)$ $\mathcal{D}(\Omega)$	
$C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert	converge uniforme sur tout compact de toutes les dérivées		partie fermée bornée
$\mathcal{D}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert	converge uniforme sur tout compact		partie fermée bornée

Questions Dore (Mandel)

(1)

- C'est quoi un ε -réseau.
- C'est quoi la pré-compacité?
- Pourquoi complet & précompact $\Rightarrow$ compact? Dem?
- Pourquoi $d(f, g) \geq 2^{-n}$?
- Comment on montre que $C(\mathbb{R})$ est complet?

Questions plan

- Appl 5 (CL). En quoi α est une appl de prop?
- Thm 10. (Ascoli). Ça veut dire quoi borné?
Expression + simple & gnale d'Ascoli?
Dem d'Ascoli?
- Appl 17. Dem?
- Thm 16. Dem?
- Ls Weierstrass
- Thm 23. (Riesz-Fischer) Dem? Et à quoi il sert?

Exercices

(2)

[1] $C([0,1], \mathbb{R})$ (à n en 1 et à de en 0)

Topologie symplectique : $\rightarrow$ Espace complet ? normable ? ... ?

$C([0,1], \mathbb{R}) : \| \cdot \|_{\infty} \leftarrow$ fermé car $\mathbb{R}$ m unif de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$C^1([0,1], \mathbb{R}) : \begin{cases} \| \cdot \|_{\infty} + \| f' \|_{\infty} \\ \text{ou } \max(\| \cdot \|_{\infty}, \| f' \|_{\infty}) \end{cases} \leftarrow$ fermé
(sans $\| f' \|$, par poncement)

(Commentaires 8/01)

- "espace"

≠ ensemble $Y^X \dots (X \rightarrow Y)$

On veut y mettre une structure !!

↳ parties d'eur.

↳ topologie $\Rightarrow$ no^o de ougece de bnc^o

- expt 1: $\exists$ mesure de proba invariante par T Co de X compact

thm de Riesz: mesure proba $\leftrightarrow$ partie de $\underbrace{\mathcal{C}^0(X)}_{\hookrightarrow \text{evn complet}}$

↳ permet d'avoir un peu de structure.

Convexe. $(\mathcal{C}^0(X))$ faible*

meure de proba = convexe compact

↳ Krein Milman:

- $\mathcal{C}^0(K, \text{parties d'un evn})$ métrique.

Théorème de Montel

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, (K_n) suite exhaustive de compacts de Ω en p. r. e., pour $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$,
$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)}$$

- Proposition: (1) Si $(f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $f_n \xrightarrow{d} f \in \mathcal{O}(\Omega) \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ c.v.u. sur tout comp.
 (2) $(\mathcal{O}(\Omega), d)$ est complet.

démonstration: (1) $\Rightarrow$ Soit $K \subset \Omega$ compact, alors $\exists n, K \subset K_n$.

Comme $\frac{2^{-n} d_n(f, f_n)}{1 + d_n(f, f_n)} \leq d(f, f_n)$, on a $\frac{d_n(f, f_n)}{1 + d_n(f, f_n)} \leq \frac{d(f, f_n)}{2^{-n}}$

pour n assez grand, donc $f_n \xrightarrow{d} f$ sur K .

$\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, m_0 tel que $\sum_{n \geq m_0} 2^{-n} \leq \varepsilon$, alors:

$\exists p_0, \forall p \geq p_0, \forall n \leq m_0, d_n(f_p, f) \leq \varepsilon$, et, si $\forall p \geq p_0, d(f_p, f) \leq \varepsilon + m_0 \varepsilon$.

(2) Soit (f_p) une suite de Cauchy de $\mathcal{O}(\Omega)$, alors, comme pour 1), on a $(f_p|_K)$ suite de Cauchy de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ complet, donc converge vers $f|_K$, or $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C})$. D'après le théorème de Weierstrass, on a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f_p \rightarrow f$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Théorème de Montel: Soit $H \subset \mathcal{O}(\Omega)$

(H est bornée $\Leftrightarrow$ H est relativement compact.)

démonstration: $\Leftarrow$ Supposons par l'absurde qu'il existe m tel que $H|_{K_m}$ n'est pas bornée, alors: $\exists (f_p) \in H^{\mathbb{N}}, \forall p \in \mathbb{N}, d_{K_m}(f, f_p) \rightarrow \infty$.
 On a $d(f, g) \geq \frac{2^{-m} d_m(f, g)}{1 + d_m(f, g)}$ (*)

Comme H est relativement compact, quitte à restreindre, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in H$, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $d(f, f_p) \leq \varepsilon$; alors $\limsup d(f, f_p) \leq \varepsilon$, et d'après (*), on a aussi $2^{-m} \leq \varepsilon$. Si l'on prend $\varepsilon < 2^{-m}$, on arrive à une contradiction.

$\Rightarrow$ Comme $\mathcal{O}(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que H est précompact.

lemme: (Si $K \subset \Omega$ est compact, $H|_K$ est équicontinue)

En effet: Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_{2\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq 2\varepsilon\} \subset \Omega$.

Comme K_{2n} est compact, et H est borné, il existe M tel que: $\forall f \in H, \|f\|_{\infty, K_{2n}} \leq M$. On pose $\boxed{\lambda := \frac{2M}{n}}$

Soit $z_1, z_2 \in K, f \in H$. Montrons que f est λ -Lipschitzienne.

- Si $|z_1 - z_2| > n$, $|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2M \leq \lambda |z_1 - z_2|$
- Si $|z_1 - z_2| \leq n$, on considère $T(z_1, 2n) \subset K_{2n}$. Alors:

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{T(z_1, 2n)} f(w) \left(\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2} \right) dw \\ &= \frac{z_1 - z_2}{2i\pi} \int_{T(z_1, 2n)} \frac{f(w) dw}{(w - z_1)(w - z_2)} \end{aligned}$$

Or on a $|z_1 - w| = 2n$ et $|z_2 - w| \geq |w - z_1| - |z_1 - z_2| \geq n$
donc $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \times 4\pi n \times \frac{M}{2n \times n}$

$$= \frac{M}{n} |z_1 - z_2|$$

$$\leq \lambda |z_1 - z_2|$$

Soit à présent $\varepsilon > 0$, m_0 tel que $\sum_{m \geq m_0+1} 2^{-m} \leq \varepsilon$

Or on a $H|_{K_{m_0}}$ équicontinue et bornée, donc relativement compact d'après le théorème d'Arzela. Il est donc précompact.

Soit $f_{m_1}, f_{m_2} \in H$ tel que $f_{m_1}|_{K_{m_0}}, \dots, f_{m_{m_0}}|_{K_{m_0}}$ est un ε -réseau de $(H|_{K_{m_0}}, d_{m_0})$. Soit alors $f \in H$

et i tel que $\|f - f_i\|_{\infty, K_{m_0}} \leq \varepsilon$, alors

on a $d(f, f_i) \leq 3\varepsilon$ et $(f_{m_1}, f_{m_{m_0}})$ est un 3ε -réseau de

Isomorphisme entre les $\mathcal{C}^0(K)$, K compact métrique

(26)

Théorème: Soit K_1, K_2 deux espaces compacts métriques
alors K_1 et K_2 sont homéomorphes si et seulement si les
(K -algèbres $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$ sont isomorphes.

démonstration: Soit $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ homéomorphisme.

On pose $T: \mathcal{C}(K_1) \rightarrow \mathcal{C}(K_2)$ est un isomorphisme d'algèbres
 $f \mapsto f \circ \varphi$ involutives.

Lemma: Les idéaux de $\mathcal{C}(K)$, pour K compact, maximaux, sont
(les $\text{Ker } \delta_x := I_x$ et $\delta_x: f \mapsto f(x)$)

En effet: I_x est un idéal maximal de $\mathcal{C}(K)$ en tant que
noyau d'une forme linéaire et morphisme d'anneaux. Réciproquement,
soit I un idéal propre de $\mathcal{C}(X)$, on suppose par l'abuse
que: $\forall x \in X, \exists f_x \in I, f_x(x) \neq 0$. Comme f_x est $\mathcal{C}^0$:
 $\exists V_x \in \mathcal{V}(x)$, ouvert, $f_x|_{V_x}$ ne s'annule pas. On considère
 $(V_x)_{x \in X}$ qui recouvre alors X compact, donc: $\exists x_1, \dots, x_m \in K$,
 $K = \bigcup V_{x_i}$. On pose alors $f := \sum_{i=1}^m |f_{x_i}|^2$, alors f ne
s'annule pas sur K , et $f \in I$, donc $1 \in I$: absurde.

On note $T: \mathcal{C}(K_1) \rightarrow \mathcal{C}(K_2)$ K -isomorphisme d'algèbres, alors
 T fait correspondre les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$.

Si $x \in K_2$, on considère $y \in K_1$ tel que $I_y^1 = T^{-1}(I_x^2)$
On note alors $\varphi(x) := y$. φ est une bijection.

Montrons que: $\forall f \in \mathcal{C}(K_1), \forall x \in K_2, (Tf)(x) = f(\varphi(x))$.

On a: $(Tf)(x) = 0 \Leftrightarrow Tf \in I_x^2$
 $\Leftrightarrow f \in I_{\varphi(x)}^1$ car $I_{\varphi(x)}^1 = T^{-1}(I_x^2)$
 $\Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0$

On pose à présent $g_x: K_1 \rightarrow \mathbb{C}$ $\in \mathcal{C}(K_1)$
 $g_x \mapsto f(x) - (Tf)(x)$

On a $(Tg_x)(x) = (Tf)(x) - (Tf)(x)$ car T est un morphisme unifié
 $= 0$

donc $g_x(\varphi(x)) = 0$, donc $f(\varphi(x)) = (Tf)(x)$.

② Montrons que φ est $\mathcal{C}^0$: Soit $W \subset K_1$ ouvert. Montrons que $\varphi^{-1}(W)$ est ouvert: Soit $x \in \varphi^{-1}(W)$, $y = \varphi(x) \in W$.

Comme W est ouvert dans une métrique, il existe

$f \in \mathcal{C}^0(K_1)$ tel que $f(y) \neq 0$ et $f|_{W^c} = 0$. Par ailleurs:

$Tf(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\varphi(\tilde{x})) = 0$, pour tout $\tilde{x} \in K_2$, donc

$Tf(\tilde{x}) \neq 0$ et $Tf|_{\varphi^{-1}(W)} = 0$. Ainsi, il existe V voisinage de x avec $V \subset \varphi^{-1}(W)$, ce qui montre que $\varphi^{-1}(W)$ est ouvert.

③ Ainsi, φ est $\mathcal{C}^0$, bijective, d'un espace compact à valeurs dans un espace séparé, donc φ est un homéomorphisme.