

NOM : PINAULT

Prénom : Louveline

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Autre sujet : 215. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

(I) Notion d'ensemble fini et de cardinal

Def-Prop 1. Un ensemble X est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre X et $\{1, \dots, n\}$.
n et valeurs déterminent uniquement et on l'appelle

Cardinal de X , noté $\text{Card}(X)$.

Exemple 2. L'ensemble des nombres pairs plus petits que 30 est fini de cardinal 15.

Prop 3. Deux ensembles ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre eux.

Prop 4. Si $A \subseteq B$ alors B fini $\Rightarrow A$ fini et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$

Cons. Si il y a une injection de A dans B fini alors A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.
Si il y a une surjection de A fini dans B alors B est fini et $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$

Prop 6. Si A et B sont finis alors $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de A fini alors $\text{Card}(A) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$.

Prop 7. Si A et B sont finis alors $A \times B$ est fini et $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \text{Card}(B)$

(II) Quelques dénombrements classiques

Dans cette partie les ensembles considérés sont finis.

Prop 8. L'ensemble des fonctions de E dans F est fini et son cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$

Exemple 9. Le nombre de mots possibles à 5 lettres est 26^5 .

Application 10. L'ensemble des parties de E est fini et son cardinal $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$.

Exemple 11. Si on a 7 personnes, le nombre de comités distincts que l'on peut former est $2^7 - 1 = 127$.

Prop 12. Si $\text{Card}(F) \geq \text{Card}(E)$, on a en notant $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des fonctions injectives de E dans F , $\mathcal{I}(E, F) = \frac{(\text{Card}(F) - \text{Card}(E) + 1)!}{\text{Card}(F)!}$

Application 13. Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $\text{Card}(\mathcal{P}_n) = n!$.

Application 14. Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E de cardinal n est $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ce nombre est noté $\binom{n}{k}$ et appelé "k parmi n".

III) Ordre de dénombrement (les ensembles considérés sont finis)

1) Manipulation d'ensembles

Prop 15 Si on a un ensemble X muni d'une relation d'équivalence telle que les classes d'équivalences ainsi définies ont un même cardinal k alors :

$$\text{Card}(X) = \text{nombre de classes d'équivalences} \times k$$

Rq 16 Réciproquement, si on connaît $\text{Card}(X)$ et k on peut savoir le nombre de classes d'équivalence, c'est le principe des bergers.

Exemple 11 On utilise ce principe pour l'application π_1

Prop 18 (Principe des tiroirs). Si N et R sont deux ensembles tels que $\text{Card}(N) > \text{Card}(R)$ et $f \in \mathcal{F}(N, R)$ alors $\exists$ existe $a \in R$, $\text{Card}(f^{-1}(a)) \geq 2$.

Exemple 19 Si $A \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ de cardinal $n+1$ alors il existe deux nombres dans A tels que l'un divise l'autre.

Prop 19 (principe de double sommation). Si L et C sont deux ensembles finis et $S \subseteq L \times C$ alors en notant

$$\begin{aligned} p &= \text{Card} \{ q \in C, (p, q) \in S \} \text{ pour } p \in L \text{ et} \\ q &= \text{Card} \{ p \in L, (p, q) \in S \} \text{ pour } q \in C \text{ on a :} \\ \sum_{p \in L} p &= \sum_{q \in C} q \end{aligned}$$

Exemple 20 Le nombre moyen de diviseurs d'un entier entre 1 et n est $\ln n$ quand $n \rightarrow \infty$

Ex 21 Si on a une action de groupe (G, X)

Def 21 Un groupe G agit sur un ensemble X si il existe une application $G \times X \rightarrow X$ telle que

$$(i) \forall (g_1, g_2) \in G^2, \forall x \in X, g_1 g_2 x = g_1 (g_2 x)$$

$$(ii) \forall x \in X, e \cdot x = x$$

Def 22 Soit $G \curvearrowright X$ Soit $x \in X$.

$$\begin{aligned} \text{Stab}_x &= \{ g \in G, g \cdot x = x \} \subset G \\ \text{Orb}_x &= \{ g \cdot x, g \in G \} \subset X \end{aligned}$$

Prop 23 Soit $G \curvearrowright X$ et $x \in X$. $\text{Card}(\text{Orb}_x) = [G : \text{Stab}_x]$

Prop 24 Si on a (G, X) une famille de représentants des orbites de l'action de G sur X alors :

$$\text{Card}(X) = \sum_{i=1}^r \text{Card}(\text{Orb}_{x_i}) = \sum_{i=1}^r [G : \text{Stab}_{x_i}]$$

Algo, The int
probability
Method

[3] Séries génératrices d'séries génératrices exponentielles

Def 25 Si (a_n) est une suite on nomme :

- $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la série génératrice de (a_n)
 - $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ la série génératrice exponentielle de (a_n)
- définies sur leurs domaines de convergence

théorème 26 Pour calculer on cardinal dépendant d'un paramètre n :

- on trouve une relation de récurrence
- on exprime la série génératrice ex génératrice exponentielle
- on se sert de la relation de récurrence pour avoir une équation différentielle et donc une autre expression de la série

Exemple 21 (Nombre de Bell). B_n nombre de partitions de l'ensemble $[0, n]$ et $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$

IV Domaines d'applications

I Probabilités

Idée 28 En probabilité on va chercher à dénombrer des événements vérifiant certaines propriétés.

Rq 29. Les probabilités peuvent aussi servir au dénombrement.

[2] Algorithmes probabilistes

Idée 30 Les algorithmes fonctionnent suivant le

principe suivant : on tire une instance au hasard et on regarde si elle vérifie la propriété. La complexité espérée de ces algorithmes dépendent du nombre d'instances vérifiant la propriété.

[3] Dés applications plus surprenantes

Exemple 31 Les automorphismes de G_n sont intéressants

$$\sim n \approx 6 !!$$

DVT
1
FON
alg 4

Plan $\rightarrow$ plus d'expos et d'applications (notamment à la fin)

Ref: Foata [Foa] (Calcul des probas)
Aigner - Günther [Aing] (Raisonnements combinatoires)
Catalan [Catal] (Eth de théorie des gpes)

+ $\left(\begin{array}{l} \text{FGN (intro)} \approx \\ \text{Nouvelin} \\ \text{Comtet} \end{array} \right)$

+ trouver un lien au niveau ~~over~~ ~~new~~