NOM : MARTY Prénom : Théo Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 183 : Utilisation des groupes en géométrie

Autre sujet :

GROS problème de la leçon ; on voit que deux gpes qui permettent de décrire les géom, pas vraiment d'utilisa°

rajouter stabilisateur ? $Stab_G(x) = \{g \in G, g.x = x\}$

K désigne un corps, tous les K-espaces vectoriel seront supposés de dimension finie.

0) Préliminaire : action de groupe

1) Déf : Soit G un groupe et X un ensemble. Une action de groupe, noté $G \curvearrowright X$, est la donnée de $\rho : G \to Bij(X)$ un morphisme de groupe. Pour $g \in G$, $x \in X$, on note $g.x := \rho(g)(x)$.

2) Déf : Soit $G \curvearrowright X$ une action. On pose pour $x \in X$: $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ l'orbite de x sous G, et $Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$ pour $g \in G$.

3) Déf : On di que $G \curvearrowright X$ est fidèle si ρ est injective, libre si $\forall g \in G \setminus \{1\}$, $Fix(g) = \emptyset$, transitive si $\forall x \in X$, $G.x = X$

I) Géométrie affine

A) Espace Affine et barycentre.

4) Déf : On dit $(\mathcal{E}, E, +)$ est un espace affine si $\mathcal{E}$ est un ensemble, E un K-espace vectoriel et $+$ un action libre et transitive de E sur $\mathcal{E}$. Soit $A, B \in \mathcal{E}$. Il existe alors un unique $\vec{u} \in E$ tel que $A + \vec{u} = B$. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

5) Prop : (Relation de Chasles). Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. De plus $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

6) Ex : $E \curvearrowright E$ naturellement et cela lui donne une structure d'espace affine.

7) Déf : Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tel que $\sum \lambda_i \neq 0$. On note $Bar((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ l'unique point M de $\mathcal{E}$ tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{A_i M} = \vec{0}$

8) Déf : On définit un repère affine comme la donnée de $(R, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ où $R \in \mathcal{E}$ et $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$ est une base de E. On définit un repère barycentrique la donnée de $(A_0 - A_n)$; tel que $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit un repère affine.

9) Prop : Soit $(A_0 - A_n)$ un repère barycentrique. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique $(\lambda_0 - \lambda_n) \in K^{n+1}$ tel que $\sum \lambda_i = 0$ et $M = Bar(A_i, \lambda_i)$. $(\lambda_0 - \lambda_n)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans ce repère.

B) Groupe affine

10) Déf : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On note $GA(\mathcal{E}) = \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, bijective tel que $\exists u \in GL(E), \forall A, M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(A) + u(\overrightarrow{AM})\}$. Soit $f \in GA(\mathcal{E})$. u est alors unique et noté $\vec{f}$.

11) Prop : $GA(\mathcal{E})$ est un groupe pour la loi $\circ$, il est appelé le groupe affine.

12) Prop : Pour tout $A_1 - A_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1 - \lambda_n \in K$ tel que $\sum \lambda_i \neq 0$, pour tout $f \in GA(\mathcal{E})$, $f(Bar((A_i, \lambda_i)_i)) = Bar((f(A_i), \lambda_i)_i)$.

13) Déf : Soit $T = \{t \in GA(\mathcal{E}), \vec{t} = Id_E\}$. Tout le sous groupe des translations de $\mathcal{E}$. Pour tout $\vec{x} \in E$, on note $t_{\vec{x}} : A \mapsto A + \vec{x}$ la translation de vecteur x

14) Prop : $\varphi : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$, $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme surjectif. On a la suite exacte :
$1 \to T \xrightarrow{i} GA(\mathcal{E}) \to GL(E) \to 1$, et de plus $GA(\mathcal{E}) \simeq T \rtimes GL(E) \simeq E \rtimes GL(E)$

15) Prop : $GA(\mathcal{E})$ agit librement et transitivement sur les ensembles des repères affines et barycentriques de $\mathcal{E}$.

C) Groupe des homothéties et translations

16) Soit $H = \{f \in GA(\mathcal{E}), \exists \lambda \in K^*, \vec{f} = \lambda Id_E\}$ Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on note H_A le groupe des homothéties de $\mathcal{E}$ de centre A. On note $h_{A,\lambda}$ l'homothétie de centre A de rapport λ.

183

rajouter que 2 dtes projectives s'intersectent

17) Prop : H est un sous-groupe distingué de G, et
$H = T \bigcup_{A \in \mathcal{E}} H_A = E \rtimes K^*$

D) Sous-espace affine.

18) Déf : Soit $F \subset E$ un sous-espace. F agit sur $\mathcal{E}$ et ses orbites sont appelés sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de direction F. *

19) Prop : Soit $(\mathcal{F}_i)_i$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ directions (F_i). Alors $\bigcap \mathcal{F}_i = \emptyset$ ou $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap F_i$.

20) Déf : Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ des sous espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles $(\mathcal{F} // \mathcal{G})$ si ils ont même direction.

21) Prop : $GA(\mathcal{E})$ agit sur les sous-espaces affines. L'action preserve le parallelisme. De plus si $h \in H \subset GA(\mathcal{E})$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous espace affine, al $\mathcal{F} // h(\mathcal{F})$.

22) Théorème de Pappus :
Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{E}$ deux droites affines distinctes. Soit $A, B, C \in \mathcal{D}$, $A', B', C' \in \mathcal{D}$ tous distincts 2 à 2. On suppose $(AB') // (A'B)$, $(BC') // (B'C)$. Alors $(AC') // (A'C)$.

* 18) bis : Déf : Soit $S \in \mathcal{E}$. On définit le sous-espace affine engendré par S comme le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant S.

E) Coniques affines

23) Déf : On suppose $\dim E = 2$. Soit $(R, \vec{u}, \vec{v})$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $P \in K[X,Y]$ de degré 2. Soit $\Pi \in \mathcal{E}$. On note $\Pi\binom{x}{y}$ ses coordonnée dans le repère $(R, \vec{u}, \vec{v})$. On définit la conique associée à P dans ce repère comme $\{\Pi\binom{x}{y} \in \mathcal{E}, P(x,y) = 0\}$.

24) Prop : $\Gamma \subset \mathcal{E}$ une conique. Pour $\Pi \in \mathcal{E}$, on note $\Pi\binom{x}{y}$ ses coordonnées barycentriques dans un repère barycentrique fixé. Alors il existe $P \in K[X,Y,Z]$ homogène de degré 2 tel que
$\Gamma = \{\Pi\binom{x}{y} \in \mathcal{E},\ x+y+z = 1 \text{ et } P(x,y,z) = 0\}$

25) Théorème :
À changement de repère affine près, les coniques affines sont
- des ellipses $x^2 + y^2 = 1$
- des hyperboles $x^2 - y^2 = 1$
- des paraboles $y = x^2$

sont dites non dégénérées.

** - vide, un point, une droite ou deux droites.

II Géométrie projective **A) Définition.**

26) Déf : Soit E un espace vectoriel. On note $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E. $\mathbb{P}(E) = E \setminus \{0\} /_{\sim}$ où $x \sim y$ si $\exists \lambda \in K^*$ tel que $x = \lambda y$. Soit $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la projection naturelle. On pose $\dim \mathbb{P}(E) = \dim E - 1$.

27) Déf : Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. $\pi(F \setminus \{0\})$ est appelé sous-espace projectif de E. Si $\dim F = 2$, $\pi(F \setminus \{0\})$ est ainsi une droite projective.

B) Lien affine/projectif

28) Soit $\phi \in E^*$ non nul et $\mathcal{F}_0 = \{\phi(x) = 0\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\phi(x) = 1\}$, deux sous-espaces affines de E. Soit $D \in \mathbb{P}(E)$. Alors $D \subset \mathcal{F}_0$ ou $D \cap \mathcal{F}_1$ est un point. On a alors une bijection entre $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F_0)$ et $\mathcal{F}_1$. Cette bijection envoit les sous espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$ qui ne sont pas incluts dans $\mathbb{P}(F_0)$, sur les sous-espaces affines de $\mathcal{F}_1$. Elle munit donc $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F_0)$ d'une structure affine cohérente avec sa structure projective. Reciproquement si $(\mathcal{E}, E)$ est un espace affine, $\pi(E \times K) \to \mathbb{P}(E \times K)$ alors
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\hookrightarrow \mathbb{P}(E \times K) \\ x &\longmapsto \pi(x, 1_K) \end{aligned}$$
preserve les sous-espaces et plonge $\mathcal{E}$ dans un espace projectif.

29) Théorème de Pappus projectif :
Soit $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace projectif. Soit $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}$ distincts 2 à 2. Soit $\alpha = (AB') \cap (A'B)$, $\beta = (BC') \cap (B'C)$ et $\gamma = (AC') \cap (A'C)$. Alors α, β et γ sont alignés.

dire que le polynome est $\neq 0$ ou rajouter l'erreur entier de la classification des coniques

(123)

bcp de calculs.
un peu long ?

C) Homographie :

30) Déf : $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ est appelée homographie si $\exists g \in GL(E)$, $f \circ \Pi = \Pi \circ g$ (où $\Pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$)
On note $GP(E)$ l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$, qui forme un groupe pour $\circ$.

31) Prop : On a la suite exacte :
$$1 \to \{\text{homothétie de } E\} \to GL(E) \to GP(E) \to 0$$

32) Prop : Les homographie agissent sur les sous-espaces projectif de $\mathbb{P}(E)$. Elles préservent l'alignement.

D) Coordonnée et repère

33) Déf : La classe d'équivalence de $(x_0 - x_n)$ de $\mathbb{P}(K^{n+1})$ est noté $[x_0 : \dots : x_n]$, qui sont ses coordonnées homogènes.

34) Déf : Supposons $\dim E = n+1$. Soit $(m_0 - m_{n+1}) \in \mathbb{P}(E)^{n+2}$.
On dit que $(m_0 - m_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ si il existe une base $(e_1 - e_{n+1})$ de E tel que $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $m_i = \Pi(e_i)$ et $m_0 = \Pi(\sum e_i)$.

35) Prop : $GP(E)$ agit librement et transitivement sur l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(E)$.

36) Déf : Soit $D = K \cup \{\infty\}$ que l'on identifie à $\mathbb{P}(K^2)$. Soit $(a,b,c) \in D^3$ distincts. Alors $\exists!\ g \in GP(D)$ tel que $g(a) = \infty$, $g(b) = 0$ et $g(c) = 1$. Alors pour tout $d \in D$, on pose $[a,b,c,d] = g(d)$ le birapport de (a,b,c,d).

37) Prop : Le birapport est invariant par homographie

38) Prop : Si a,b,c,d sont distincts 2 à 2,
$$[a,b,c,d] = \frac{a-c}{a-d} \, \frac{b-c}{b-d}$$

E) Coniques projectives. $(E = \mathbb{R}^3)$

39) Déf : Soit $P \in K[X,Y,Z]$ homogène de degré 2. Alors $P(x,y,z)$ définit une partie de E stable par homothétie, donc définie une partie de $\mathbb{P}(E)$, appelé conique projective.

*

défini que dans ce cas là ?

40) Théorème :
Les coniques projectives sont d'une des formes suivantes (à homographie près) : un point, une droite, deux droites sécantes et une ellipse qui est dite non dégénérée.

41) Théorème de Pascal :
Soit six points du plan projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, A, B, C, A', B', C' tel que aucun triplet de points ne sont alignés. Alors il existe une conique non dégénérée qui passe par ces points ssi $(AB') \cap (A'B)$, $(AC') \cap (A'C)$ et $(BC') \cap (B'C)$ sont alignés.

DV2

*
39) bis. Prop : Soit $\mathbb{P}(F_0) \subset \mathbb{P}(E)$ une droite projective et $\Phi : \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F_0) \to F_1 \subset E$ une bijection sur un plan affine comme dans la remarque 28). Alors Φ une bijection entre les coniques non dégénérée de $\mathbb{P}(E)$ (intersectée avec $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F_0)$) et les coniques non dégénérée de F_1.

** 25.5) Théorème : ellipse de Steiner
On identifie le plan euclidien à $\mathbb{C}$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ non alignés. Alors il existe une unique ellipse tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. De plus les foyers de l'ellipse sont les racines de la dérivée de $P(X) = (X-a)(X-b)(X-b)$.

DV1

References :
Audin : Géométrie
Combes : Algèbre et géométrie

Défense de plan

- Gpes permettent de reformuler les notions impliq et de formaliser
- Qd on a un problème en géom, avec les gpes on peut se ramener à un cas plus simple (eg. faire agir le gpe affine pour montrer que les médianes sont concourantes en se ramenant ds un triangle équilatéral)

→ motiva°

2 géoms associées av leurs gpes :

- géom affine → gpe affine
- géom proj. → gpe des homographies.

Commentaires gnx

- Dans le plan, bcp d'insistance entre le ≃isme formel entre géom. affine et projective. Mettre aussi en valeur leur différences (au moins à l'oral) eg. 2 dtes s'intersectent.
- faire des dessins !!

Questions chap 2

- Pquoi prendre une carte affine ?
  ↳ Pas bs, ñ calculs ds un repère projectif et ds un repère affine.
- Besoin que ce soit ℝ ?
  ↳ On peut avoir des problèmes pour choisir une dte qui passe par par les 3 pts si le corps n'est pas ∞. Sur un corps ∞ qque devrait être possible mi il faut une classification des coniques.

Rqs défense de plan

- faire des dessins !!
- trop vague ! Concepts bien ms les illustrer av un ou dx exples percutants.

Rqs & questions plan

- On peut parler de conjugaison, fait le lien entre gpe et géom.

– Dire clairement que fonctions affines préservent les ss-espace affines (point 21)

– Une fonction affine préserve l'alignement. Réciproque ?

↳ pas sur un ℂ espace affine par exple (car conjugaison) de dim ≥ 2.

Vrai condition : il ne faut pas qu'il y ait d'automorph de corps non triviaux sur le corps de base (eg $\mathbb{R}$ (:)).
(pareil pour la géom proj)

– Est-ce qu'on peut orienter un ev sur $\mathbb{C}$?

↳ Non car $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ connexe (pas $\mathbb{R}\setminus\{0\}$). ← peut se mettre dans le plan

Exercices

1) $h_{A,\alpha}$, $h_{B,\beta}$ deux homothéties. Qu'est ce que leur composée ?

$\overrightarrow{h_{A,\alpha}} = \alpha I_n$ et $\overrightarrow{h_{B,\beta}} = \beta I_n$ donc $\overrightarrow{h_{A,\alpha}} \circ \overrightarrow{h_{B,\beta}} = \alpha\beta I_n$.

• Si $\alpha\beta = 1$, $h_{A,\alpha}\circ h_{B,\beta}$ est une translation. On l'applique en un pt pour savoir laquelle : $h_{A,\alpha}\circ h_{B,\beta}(B) = h_{A,\alpha}(B) = A + \alpha\overrightarrow{AB}$
$= B + (\alpha-1)\overrightarrow{AB}$. Donc $h_{A,\alpha}\circ h_{B,\beta} = t_u$ où $u = (\alpha-1)\overrightarrow{AB}$

• Si $\alpha\beta \neq 1$, c'est une homothétie. On en cherche le centre (= unique pt fixe)
Soit C tq $h_{A,\alpha}\circ h_{B,\beta}(C) = C$:

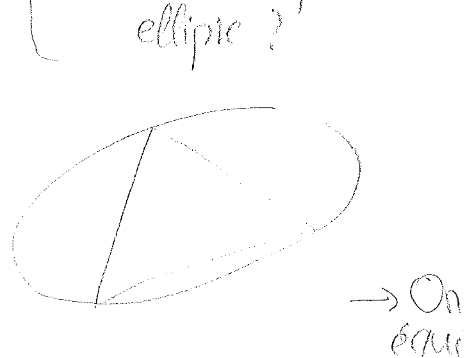
$h_{A,\alpha}(B + \beta\overrightarrow{BC}) = C \iff A + \alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\beta\overrightarrow{BC} = C$

$\iff \alpha\beta\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{AB} = 0 \iff \alpha\beta\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \alpha\overrightarrow{AB} = 0$

$\iff \overrightarrow{CB} = \dfrac{(\alpha+1)\overrightarrow{AB}}{\alpha\beta+1} \iff C = B + \dfrac{(\alpha+1)\overrightarrow{AB}}{\alpha\beta+1}$

$\boxed{\overrightarrow{MN} = N - M}$ (ça ne pas écrire)

2) $\mathcal{E}$ une ellipse $\mathcal{A}$ = Aire($\mathcal{E}$). Aire maximale d'un triangle de cette ellipse ?



L'aire n'est pas une notion affine.

Mais comme c'est le rapport des aires c'est bon.

→ On se ramène au cercle. On montre que c'est le triangle équilatéral (on des sommets = 1, aire = det des 2 vecteurs /2)

(3) On se place de $\mathbb{R}^2$, euclidien.
Nature et élts caractéristiques de l'ensemble : $\{XY - X - Y = 0\}$?

$$XY - X - Y = (X-1)Y - (X-1) - 1 = (X-1)(Y-1) - 1$$

En faisant le chgt de repère $\begin{cases} X' = X-1 \\ Y' = Y-1 \end{cases}$, on obtient $X'Y' = 1$

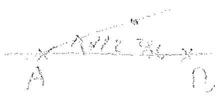
qui est l'équation d'une hyperbole.

Dans le repère $((1,1), \vec{e_1}, \vec{e_2})$ où $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La conique a pr équa° $XY = 1$. :

$${}^t\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1$$

→ Revoir la réduction de conique !!

Commentaires

- Sur la forme : très bien ! Sur le fond : moins bien.
- Mettre les angles. Une partie de géom. euclidienne. Impt. Plus impt que de parler de géom projective.
- Élever le débat. Un gpe qui agit. Si l'ac° est non transitive → classifica° des orbites : → recherche d'invariants (totaux, c'est mieux)
  → réduction à une forme normale (eg. classifica° des isométries, plan, espace)
  eg. angles, birapport, excentricité, longueur d'axe, signature
- mettre + d'[illegible] géométrie/algèbre (algèbre = qd on apprend des trucs sur le gpe, géom = qd on apprend des choses sur l'espace sur lequel ça agit)
  eg. , orientation.
- Réduire les parties géométrie pure affine et projective. Laisser les trucs en prérequis
- peut parler en + de représentations (eg. isométries du tétraèdre)
- plus insister sur le ppe de conjugaison (eg $s \circ r \circ s^{-1} = r^{-1}$; $r \circ s \circ r^{-1} = ?$)
- exo : $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ G fini. Qui est G ?
- gpes d'isom de solides (solides de Platon, ...)
- quitte à parler de coniques mentionner l'algo de Gauss de réduc° des fmes quadra