rajouter la une fnde de l'exponentielle complexe !
au moins mettre la déf de l'exp en tant que série entière et mettre les propr des morf.

Il ne faut pas confondre sinus géom !! Cela ne qui fait l'intérêt des complexes en géom. cmp de définir ds plan

Jury :

NOM : NUSSBAUMER Prénom : Jonné

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 182. Applications des nombres complexes à la géométrie.

Autre sujet : Références : Homographies. Ramis-Warusfel, Audin, Eidan

DEV 1 : Fresnel - Matignon

DEV 2 : Audin

I - Géométrie euclidienne

1 - Généralités

Proposition 1 : Le choix d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ permet d'identifier le plan affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

Définitions 2 :

* Un point $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'identifie à son affixe $z = x+iy$. On note $M(z)$ pour désigner l'image de z.
* $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = x$ est la partie réelle de z.
  $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = y$ est la partie imaginaire de z.

2 - Angles et distances

Propriétés 3 : Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan.

* La distance entre M et M' est $|z-z'|$.
* Le produit scalaire correspond à $Re(\bar{z_1} z_2)$:
  z_1 et z_2 sont orthogonaux ssi $Re(\bar{z_1} z_2) = 0$.
* Le produit vectoriel correspond à $Im(\bar{z_1} z_2)$:
  z_1 et z_2 sont colinéaires ssi $Im(\bar{z_1} z_2) = 0$.

Proposition 4 : Etants donnés deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre.

Définition 5 : On définit une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires :
$(u,v) \mathcal{R} (u',v')$ ssi la même rotation envoie u sur u' et v sur v'.
La classe d'équivalence de (u,v) est appelée angle orienté de u et v, on la note encore (u,v).
Il est encore défini pour $(\lambda u, \mu v)$ avec $\lambda, \mu > 0$.

Proposition 6 : On dispose d'isomorphismes :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U \xrightarrow{\sim} O^+(\mathbb{R}^2) \longrightarrow S^1/\mathcal{R}$$
$$\theta \longmapsto e^{i\theta} \longmapsto (z \mapsto e^{i\theta} z) \longmapsto ((1,0),(\cos\theta, \sin\theta))$$

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est unique et $\theta \in \mathbb{R}$ est unique modulo 2π.

Propriété 7 : Soient $A(a), B(b), C(c)$ trois points distincts. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{c-a}{b-a} \pmod{2\pi}$. En particulier,
A, B, C sont alignés ssi $\arg \frac{c-a}{b-a} \equiv 0 \pmod{\pi}$
ssi $\arg \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

3 - Transformations du plan

Proposition 8 : Les similitudes directes (resp. indirectes) sont les applications $z \mapsto az+b$ (resp. $z \mapsto a\bar{z}+b$) où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Le rapport de la similitude est $|a|$ et en particulier, il s'agit d'une isométrie ssi $|a| = 1$.

Exemples 9 :

* Homothétie de centre $A(a)$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$:
  $z \mapsto a + \lambda(z-a)$
* Rotation de centre $A(a)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:
  $z \mapsto a + e^{i\theta}(z-a)$

Remarque 10 : Ayant choisi un repère orthonormé direct, on peut identifier $Sim^+(\mathbb{R}^2)$ au groupe $GA_1(\mathbb{C})$ des transformations affines de la droite affine complexe $\mathbb{C}$.

Propriétés 11 :

* Les similitudes conservent les angles non orientés.
* Toute similitude de rapport distinct de 1 admet un unique point fixe.

1/4

182

II - Lieux géométriques usuels

1 - Droites, cercles et coniques

Proposition 12 :

* Toute droite affine admet une équation de la forme
$$\bar{A}z + A\bar{z} + B = 0, \quad \text{où } A \in \mathbb{C}^* \text{ et } B \in \mathbb{R}.$$
* Le cercle de centre $C(\omega)$ et de rayon r admet pour équation
$$\bar{z}z - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \omega\bar{\omega} = r^2.$$
* Plus généralement, l'équation d'une conique est de la forme
$$A\bar{z}z + \bar{B}z^2 + B\bar{z}^2 + \bar{C}z + C\bar{z} + D = 0$$
où $A, D \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \neq (0,0)$.

Exemple 13 : Si $A(a) \neq B(b)$, une équation de la droite $A(a)B(b)$ est
$$\begin{vmatrix} a & b & z \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2 - Géométrie du triangle

On se donne trois points $A(a), B(b), C(c)$ formant un triangle non aplati.

Proposition 14 : L'aire du triangle orienté ABC est
$$S = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}).$$

On suppose maintenant que l'origine est placée au centre du cercle circonscrit Γ, de rayon R. On a donc $A, B, C \in \Gamma = C(0,R)$.

Proposition 15 : Dans ce repère,
* le centre de gravité G a pour affixe $\frac{a+b+c}{3}$,
* l'orthocentre H a pour affixe $a+b+c$.

Proposition 16 (Cercle d'Euler) : Il existe un cercle qui passe par :
- les milieux de AB, AC, BC, AH, BH, CH,
- les pieds des hauteurs issues de A, B et C.

Son centre est l'isobarycentre des points A, B, C, H. (cf annexe)

Proposition 17 (Triangles remarquables) : Dans le même repère,
* ABC est rectangle en A ssi $b+c=0$.
* ABC est isocèle en A ssi $a^2 = bc$.
* ABC est équilatéral direct (resp. indirect) ssi $a + bj + cj^2 = 0$ (resp. $a + bj^2 + cj = 0$).

Application 18 (Point de Fermat-Torricelli) : L'application $M \mapsto MA + MB + MC$ définie sur l'intérieur du triangle atteint son minimum en :
* T qui vérifie $\widehat{A\Omega B} = \widehat{C\Omega A} = \widehat{B\Omega C} = \frac{2\pi}{3}$ si les angles du triangle sont inférieurs ou égaux à $\frac{2\pi}{3}$.
* A, B ou C si l'un des angles est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

Application 19 (Ellipse de Steiner) : Il existe une ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux trois côtés du triangle ABC en leurs milieux. De plus les foyers de cette ellipse ont pour affixes les racines du polynôme dérivé de $(X-a)(X-b)(X-c)$. + unicité de la conique

Bon !! D1

III - Géométrie projective

1 - Définition

Définition 20 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. L'espace projectif associé $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E, c'est-à-dire $(E \setminus \{0\})/K^*$.
Quand $E = K^{n+1}$, on le note $\mathbb{P}_n(K)$.

Définition 21 : On appelle $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ la droite projective complexe.

Remarque 22 : On peut considérer $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ comme
* l'espace des vecteurs de longueur 1 dans l'espace hermitien $\mathbb{C}^2$ modulo l'opération du groupe U.
* la complétion projective de la droite affine complexe : $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On parle de la sphère de Riemann.
* la sphère unité S^2 de l'espace $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ via la projection stéréographique.

2- Homographies

Définition 23 :
Une homographie $g : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ tel que $p' \circ f = g \circ p$ où p et p' sont les projections $E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ et $E' \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E')$.

Proposition 24 : Les homographies de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même forment un groupe pour la composition des applications, noté $PGL(E)$. De plus, $PGL(E) \cong GL(E) / \{\text{homothéties}\}$.

Remarque 25 : Si $E = K^n$, on note $PGL_n(K)$.

Proposition 26 : Un isomorphisme f de $\mathbb{C}^2$ s'écrit sous la forme $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ avec $ad-bc \neq 0$. En écrivant $z = \frac{x}{y}$, on obtient l'écriture $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec les conventions $g(\infty) = \frac{a}{c}$ et $g(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Proposition 27 : Le groupe $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Corollaire 28 : Un élément de $PGL_2(\mathbb{C})$ conserve les angles orientés.

3- Biapport

Théorème 29 : $PGL_2(\mathbb{C})$ agit 3-transitivement et simplement sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Définition 30 : Soient $a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ distincts. Soit $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Le biapport de (a,b,c,d), noté $[a,b,c,d]$, est l'image de d par l'unique homographie qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1.

Proposition 31 : Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre points (les 3 premiers étant distincts) et a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4 quatre points vérifiant la même hypothèse. Alors il existe une homographie f telle que $f(a_i) = a'_i$ ssi $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$.

Remarque 32 : Les homographies conservent le biapport.

Proposition 33 : Soient $a, b, c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ distincts. Soit $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Alors $[a,b,c,d] = \frac{d-b}{d-a} \Big/ \frac{c-b}{c-a}$

Théorème 34 (Pascal) : Soit $\mathcal{C}$ une conique propre et soient a, b, c, d, e et f six points de $\mathcal{C}$. Alors les points d'intersections de ab et de, bc et ef, cd et fa sont alignés. (cf annexe)

D2

4- Cercles - droites

Proposition 35 : Le biapport de quatre points alignés sur une droite affine réelle contenue dans $\mathbb{C}$ coïncide avec leur biapport comme points de la droite affine complexe $\mathbb{C}$.

Proposition 36 : Quatre points de $\mathbb{C}$ sont alignés (sur une droite affine réelle) ou cocycliques ssi leur biapport est réel.

Pas de sens canonique de cocyclicité cf 1776

Application 37 (droite de Simson) : Soit $A(a)B(b)C(c)$ un triangle non aplati et $M \notin \{A, B, C\}$. On appelle M_A, M_B, M_C les projetés orthogonaux de M sur les côtés BC, CA, AB. Alors M_A, M_B, M_C sont alignés ssi M appartient au cercle circonscrit à ABC. (cf annexe)

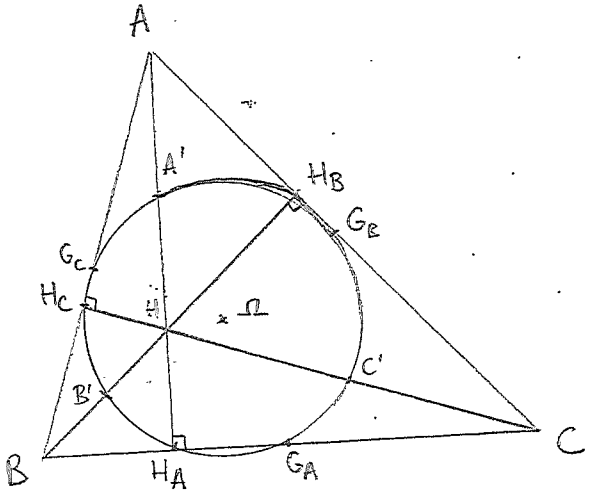
Définition 38 : On appelle inversion de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ l'application $i : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (étendue en a et ∞).
$$z \longmapsto a + \frac{k}{\overline{z-a}}$$

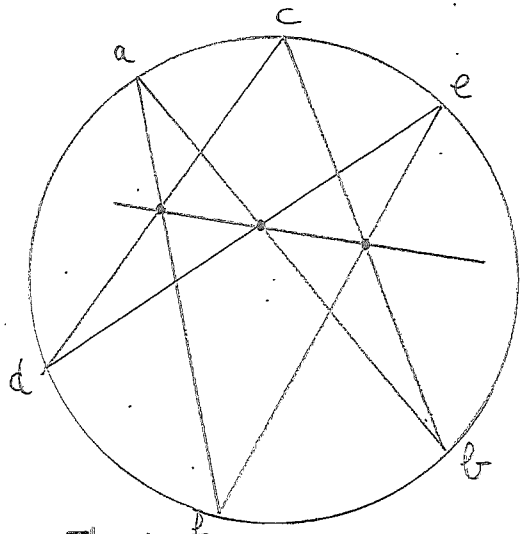
Propriété 39 : Si on note $A(a), M(z), M(z')$, avec $z' = i(z)$, on a A, M, M' alignés et $\overline{AM} \times \overline{AM'} = k$.

Propriété 40 : Si i envoie M sur M' et N sur N',
$$M'N' = k \frac{MN}{AM \times AN}$$

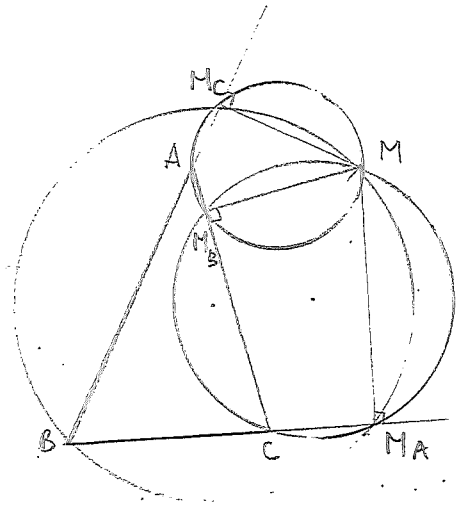
Application 41 (Ptolémée) : Dans le plan affine euclidien, un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle ssi on a l'égalité suivante : (cf annexe)
$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Cercle d'Euler

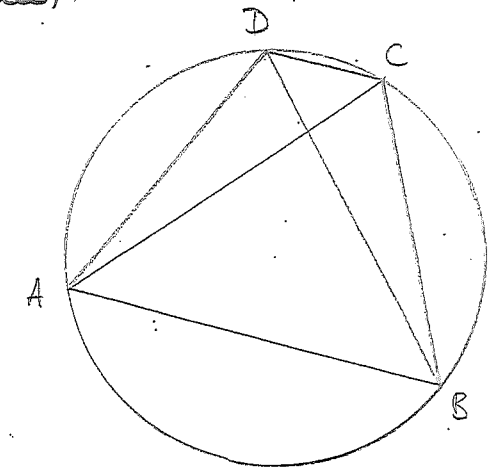




Théorème de Pascal
(cas d'un cercle)



Droite de Simson



Théorème de Ptolémée

(Définir le plan)

Questions

- Tu dis qu'avec le birapport on a une condition pour que des pts soient alignés ou cocycliques ds $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Qu'est-ce que ça veut dire être cocyclique ds $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

  Dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il n'y a pas d'infini fixé. Que se passe-t-il si on change de carte affine ?

  ↳ $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ n'est pas euclidien ⇝ pas de notion de cercle

  Lorsque le birapport est réel alors les pts sont alignés sur une dte projective de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donc lorsque qu'on prend une carte affine et qu'on identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en fixant le point à l'infini alors les points qui soient alignés soient cocycliques dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- Part 1 : * Est-ce qu'il peut y avoir d'autres coniques qui vérifient ces conditions ?

  ↳ Non. Une conique définie par 5 conditions

  Et là on en a 6 (3 points + 3 tangences)

  * Est-ce qu'il y a un résultat qui généralise l'histoire des $\int$ du polynôme dérivé ?

  ↳ $P = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distincts $\quad P' = n \prod_{k=1}^{n-1} (X - \mu_k)$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_i}$$

$$0 = \frac{P'}{P}(\mu_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_k - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\mu_k - \lambda_i}}{|\mu_k - \lambda_i|^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_k}{|\mu_k - \lambda_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{|\mu_k - \lambda_i|^2} \qquad \mu_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\mu_k - \lambda_i|^2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{|\mu_k - \lambda_i|^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$$

Et si les λ_i pas distincts ?

↳ Ne change rien (on rajoute juste un coeff dvt les termes de la somme de la dérivée logarithmique)

Rqs Gaëtan Plan

- Tu parles trop de $\mathbb{H}$ ce qui est direct. Conjugaison pas assez présente.
- Donner la forme des applica° affines en complexe :

$$\begin{cases} z \mapsto uz + v\bar{z} + w & \in \mathbb{C} \\ x,y \mapsto ax + by + c & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{H}$ le plan pas très clair distinc° affine réelle ou complexe (pas mêmes résultats)

Questions plan

- Prop 7. C'est quoi l'arg.
- Prop 6 Pquoi $\theta \in \mathbb{R}$ est unique modulo 2π ?
  Pquoi $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ mor φ ? Pquoi il est surjectif ?
  Pquoi il est pas injectif ?
  Sq $e^{2i\pi} = 1$. C'est qui π ? C'est quoi cos ? ... ?
  ⇝ rapporter une étude de l'exp $\mathbb{C}$ du le plan
  On def π par : on sait que le mor φ est pas inj. Son noyau est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle $\alpha = 2\pi$.
- Prop 17. Pquoi ABC rectangle en A ssi $b+c = 0$?
  ↳ ⚠ au repère !!
- Appli 18 Idée de la preuve ? (N'utilise pas trop les $\mathbb{C}$ en fait ☺)

Commentaires plan

- Il faut parler de l'exp. du moins def et propr de mor φ
- Plan pas mal mais + mettre en lumière ce qui est affine $\forall \mathbb{R}$ et $\forall \mathbb{C}$.
- Peut parler de construc° à la règle et au compas.
  (appels : on peut pas trisecter un angle ni construire la $\sqrt{2}$ à la règle et au compas)

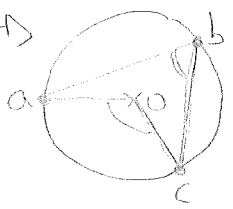
Exercices

- Mettre $\sqrt{3}+i$ sous forme polaire

↳ $= 2\,\frac{\sqrt{3}+i}{2} = 2e^{i\pi/6}$

- Démontrer le thm de l'angle au centre par les complexes

↳



On suppose le cercle unité (translat° + dilatat° ne change pas les angles). De m on suppose $a = 1$ (rotat° ne chge pas les angles)

On note $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$. Mq $2\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{a}{c}\right)$

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{1-e^{i\beta}}{e^{i\gamma}-e^{i\beta}}$$

$$1-e^{i\beta} = e^{i\beta/2}\left(\frac{e^{i\beta/2}-e^{-i\beta/2}}{2i}\right)\times 2i$$

$$= -\sin(\beta/2)\,e^{i\beta/2}\times 2i = -2\sin(\beta/2)\,e^{i\frac{\beta+\pi}{2}}$$

et $$e^{i\gamma}-e^{i\beta} = e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{(\gamma-\beta)}{2}}-e^{-i\frac{(\beta-\gamma)}{2}}}{2i}\right)\times 2i$$

$$= 2\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\gamma+\beta+\pi}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c-b} = -\frac{\sin(\beta/2)}{\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}\,e^{i\frac{\cancel{\beta}+\cancel{\pi}-\gamma-\cancel{\beta}-\cancel{\pi}}{2}} \Rightarrow \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \frac{-\gamma}{2}.$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{e^{i\gamma}} = e^{-i\gamma} \Rightarrow \arg\left(\frac{a}{c}\right) = -\gamma = 2\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)$$

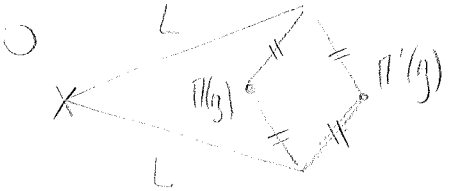
- Quelle est la nature géométrique de $\{z \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\ \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\}$

↳ $\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

cercle unité

(autre manière de faire : c'est l'image de $i\mathbb{R}$ par une homographie → c'est une dte ou un cercle + regarder l'image de certains pts)

- Inverseur de Peaucellier-Lipkin $\Pi(z)$ et $\Pi'(z)$ sont inverses l'un de l'autre

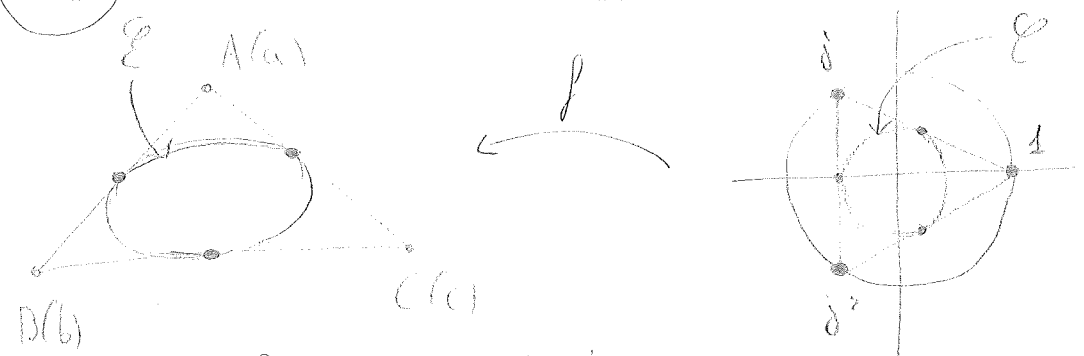


Cela permet de transformer un mvt rectiligne en mvt circulaire.

"L'inversion en particulier c'est une transformat° de Moebius donc..."

Bien (☺)

Qst 1 (Ellipse de Steiner)



Rq. Penser pour le triangle $(1, j, j^2)$ et permet de faire des calculs sans même dessiner. Mais il est de savoir en coordonnées barycentriques % aux sommets

Soit f application affine tq $f(1)=a$, $f(j)=b$, $f(j^2)=c$.

$f(z) = uz + v\bar{z} + w$.

Soit $\mathcal{E} = f(\mathcal{C})$ * $\mathcal{E}$ est une ellipse bornée

appli affine conserve barycentres et tangence

* $\mathcal{E}$ passe par les milieux des côtés du triangle.
* $\mathcal{E}$ tangente aux côtés

Soit $F = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$

$\mathcal{E} = \{ v + \frac{u}{2}e^{i\theta} + \frac{v}{2}e^{-i\theta},\ 0 \le \theta < 2\pi \}$ On pose $\begin{cases} u = |u|e^{i\omega_1} \\ v = |v|e^{i\omega_2} \end{cases}$

$\mathcal{E} = w + \{ \frac{|u|}{2}e^{i(\omega_1+\theta)} + \frac{|v|}{2}e^{i(\omega_2+\theta)},\ 0 \le \theta < 2\pi \}$

$= w + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}} \{ \frac{|u|}{2}e^{i(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}+\theta)} + \frac{|v|}{2}e^{i(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}-\theta)},\ 0 \le \theta < 2\pi \}$

$= w + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}} \{ \frac{|u|}{2}e^{it} + \frac{|v|}{2}e^{-it},\ 0 \le t < 2\pi \}$

$= w + e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}} \{ \underbrace{\frac{|u|+|v|}{2}}_{\alpha} \cos t + i \underbrace{\frac{|u|-|v|}{2}}_{\beta} \sin t,\ 0 \le t < 2\pi \}$

$\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. $\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{|u|+|v|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|u|-|v|}{2}\right)^2 = |u|.|v|$

$\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \pm\sqrt{|u||v|}$

Les foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$ sont : $w \pm e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}\sqrt{|u|.|v|}$ (← propriété à bien connaître)

↳ réinjecter cette expression ds $F' = 3X^2 - 2(a+b+c)X + (ab+bc+ca)$ et vérifier que ça s'annule

avec $\begin{cases} a = u+v+w \\ b = uj+vj^2+w \\ c = uj^2+vj+w \end{cases}$ et $1+j+j^2=0$

$\rightsquigarrow a+b+c = 3w$

$ab+bc+ca = u^2\overbrace{(j+j^2+1)}^{0} + v^2\overbrace{(1+j+j^2)}^{0} + 3w^2 + uv\underbrace{(j^2+j+j+j^2+j^2)}_{-3}$
$+ uw(1+j+j^2+1+j+j^2) + vw(\underbrace{\quad}_{0})$

$F' = 3X^2 - 6wX + 3w^2 - 3uv$