⚠ aux abréviations

NOM : LAVIGNE — Prénom : Florian — Jury : N°180*

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Coniques. Applications

Autre sujet :

Conseil : parler de formes bilin. et polaires (par que quadr.)

Règles sur les notations :
- les introduire au bon moment (pas après, pas 3 pages avant)
- ne pas hésiter à les rédire qd on les utilise + tard
- ne pas en introduire si elles ne servent à rien

Ici on considère des Kevs avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Rappels sur les formes quadratiques

Th1 : Soit $q \in Q(E)$. $\{0\}$ avec E evdf, $n = \dim E$. Il existe alors $(l_i)_{i \le n}$ base de E^* et $m \le n$ scalaires non nuls avec : $q = \sum_{i=1}^{m} a_i l_i^2$

Rq2 : La preuve donne un algorithme (de Gauss) pour trouver cette décomposition.

Th3 : Si E est un $\mathbb{C}$ev, on peut prendre $a_i = 1$.

Th4 : (Sylvester) Soit q forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ev. Il existe $(l_i)_{i \le n}$ base de E^* et $0 \le s \le r \le n$ tels que :

$$q = \sum_{i=1}^{s} l_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} l_i^2$$

Le couple (r, s) ne dépend que de q. ← pquoi ?

II - Coniques projectives sur Eev de dimension 3

(pas canonique)

Prop5 : Deux formes quadratiques Q et Q' sur $\mathbb{P}(E)$ non nulles sur E et colinéaires ont le même cône isotrope id est $Q(x) = 0 \Leftrightarrow Q'(x) = 0$.

Rq6 : $Q(E)$ est en bijection avec $Sym_3(\mathbb{K})$. L'espace projectif $\mathbb{P}(Q(E))$ est donc de dimension 5.

→ que une bijection ? isomorph d'ev.

A) Définitions

Déf7 : On appelle conique du plan projectif $\mathbb{P}(E)$ tout point de $\mathbb{P}(Q(E))$

Rq8 : Soit $\mathcal{C} \in \mathbb{P}(Q(E))$ et $Q \in \pi^{-1}(\mathcal{C})$. Via prop5, le cône isotrope de Q ne dépend que de $\mathcal{C}$.

Déf9 : On appelle image de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{P}(E)$:

$$C := \{M \in \mathbb{P}(E),\ \exists u \in \pi^{-1}(M),\ Q(u) = 0\}$$

pour $Q \in \pi^{-1}(\mathcal{C})$.

Ex10 : Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, x^2+y^2 a pour image $[0:0:1]$

Ex11 : Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, l'image de $x^2+y^2+z^2$ est $\emptyset$.

Rq12 : 0 n'est pas une conique, et le plan n'est l'image d'aucune conique.

B) Cas complexe

Th13 : Soit $\mathcal{C}$ conique d'image C et $D = \mathbb{P}(V)$ avec V plan vectoriel de E. Alors :
(i) soit D coupe C en deux points distincts
(ii) soit D coupe C en un unique point.
(iii) soit $D \subseteq C$.

Déf14 : Dans le cas (ii) on parle de point (d'intersection) double. Un point M de $\mathcal{C}$ est un point double s'il est point d'intersection double pour toute droite $D \not\subset C$ et C.

Th15 : Une conique qui contient un point double est réunion de 2 dtes proj. éventuellement confondues et contenant ce point.

Prop16 : Si $\mathcal{C}$ possède un unique pt dble, $rg(Q) = 2$. Si $\mathcal{C}$ en possède une droite, alors $rg(Q) = 1$. → en fait équiv. (la prop.)

Cor17 : Si Q et $Q' \in \pi^{-1}(\mathcal{C})$, alors $rg(Q) = rg(Q')$

Déf18 : Soit $\mathcal{C}$ et $Q \in \pi^{-1}(\mathcal{C})$. Si $rg(Q) = 3$, alors $\mathcal{C}$ est propre, sinon elle est impropre.

Th19 : (Classification des coniques proj. comp.) Soit $\mathcal{C}$ d'équation $Q = 0$. Il existe $(l_0, l_1, l_2) \in E^*$ lin. ind. avec :
(i) si $rg(Q) = 3$, $\mathcal{C}$ est propre d'équation :

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 = 0$$

(ii) si $rg(Q) = 2$, $C = D_+ \cup D_-$ avec $D_+ = \{l_0 + i l_1 = 0\}$ et $D_- = \{l_0 - i l_1 = 0\}$. L'équation de $\mathcal{C}$ est alors $l_0^2 + l_1^2 = 0$ et $D_+ \cap D_-$ est l'unique point double de $\mathcal{C}$.
(iii) si $rg(Q) = 1$, son équation devient $l_0^2 = 0$ et son image est la droite de points doubles $D_0 = \{l_0 = 0\}$

Déf20 : La droite projective D est tangente à $\mathcal{C}$ si $D \cap \mathcal{C}$ est un point double, appelé point de contact. Si $D \cap \mathcal{C}$ a au moins 2 points, on dit que D est sécante à $\mathcal{C}$.

Th21 : En tout point d'une conique propre, celle-ci admet une unique tangente.

⚠ Distinc° entre équa° de la conique et son image (eg. Th15) / réduire projectif à son strict minimum

(Ingrao) → essentielles : = III arrivent forcément vers la fin (car coniques eucl. + compliquées car plus de struct.) . cas elliptiques ?

Réf : • Ingrao, Coniques proj., affines et métriques
• Eiden, Géométrie analytique classique
• Lavillé, Géo. pour le CAPES et l'Agreg
• Audin, Géométrie
• Rousseau, Mathématiques et Technologie
• Gruber, Mécanique Générale

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : N°180

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Coniques. Applications

Autre sujet :

C) Cas réel

Th 22: Une droite projective D non contenue dans $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points (distincts ou non) ou ne la coupe pas.

Rq 23: Les notions de points doubles et de tangente sont conservées.

thm-déf → Th 24: (Classification des coniques réelles) Soit $\mathcal{C}$ d'équation $Q=0$. Il existe $f_0, f_1, f_2 \in E^*$ lin. ind. avec:

(i) si $rg(Q)=3$, la conique (propre) a pour équation $f_0^2+f_1^2+f_2^2=0$ ou $f_0^2+f_1^2-f_2^2=0$

(ii) si $rg(Q)=2$, son équation est $f_0^2+f_1^2=0$ ou $f_0^2-f_1^2=0$ et admet un unique point double.

(iii) si $rg(Q)=1$, l'équation est $f_0^2=0$ et $\mathcal{C}$ est une droite de points doubles.

Prop 25: Une conique propre n'a pas de point double.

à enlever → Prop 26: Une conique est réduite à un point ssi sa complexifiée est impropre et constituée de deux droites conjuguées.

Th 27: Toute conique propre admet en tout point une unique tangente.

III - Coniques affines réelles

A) Présentation

Déf 28: Une conique du plan affine $\mathcal{P}$ est l'intersection avec $\mathcal{P}$ de l'image d'une conique projective du complété projectif π.

Prop 29: $\mathcal{C}$ est une conique affine ssi c'est l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ avec
$\varphi(\vec{PM}) + 2 f_P(\vec{PM}) + c = 0$,
pour $\varphi \in Q(\vec{\mathcal{P}})$, $f \in \vec{\mathcal{P}}^*$, $c\in\mathbb{R}$, $P\in\mathcal{P}$.

Déf ou énoncé → Rq 30: Les coniques impropres sont :

(i) un unique point double

(ii) une paire de droites concourantes

(iii) une paire de droites parallèles

(iv) une paire de parallèles conjuguées dans le complexifié

(v) une droite de points doubles.

(vi) une droite de points simples

Déf 31: Soit $\mathcal{C}$ et $P\in\mathcal{P}$. Si $f_P=0$, P est un centre de $\mathcal{C}$. Si P est unique (et existe) $\mathcal{C}$ est une conique à centre (on prendra $\mathcal{C}$ propre)

Rq 32: Soit P centre de $\mathcal{C}$. Alors P est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

Th 33: (Classification des coniques à centre) Il existe un repère affine d'origine le centre:

(i) soit $x^2+y^2=1$ (ellipse)

(ii) soit $x^2-y^2=1$ (hyperbole)

Th 34: Pour une ellipse $\mathcal{C}$, il existe deux tang. dans une direction donnée.

Déf 35: Les asymptotes d'une hyperbole sont les droites définies par $x^2-y^2=0$. On les note A_1, A_2

Th 36: Soit $M\notin\mathcal{C}$ hyperbole. Alors :

(i) si $M\notin A_1\cup A_2$, on peut mener par ce point deux tangentes à $\mathcal{C}$.

(ii) si $M\in A_1 \setminus A_2$, on peut y mener une unique tangente à $\mathcal{C}$.

(iii) si $M\in A_1\cap A_2$, M est le centre de $\mathcal{C}$.

Th 37: La seule conique propre d'image non vide qui n'a pas de centre admet pour équation $y^2=x$ dans un certain repère affine.

Déf 38: $\{(x,y)\in\mathcal{P},\ y^2=x\}$ est appelé parabole.

Th 39: Toute parabole admet une unique tangente dans chaque direction autre que verticale.

Déf 40: L'origine du repère (lié à la parabole) est appelé sommet

Th 41: Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ propres. Il existe une transformation affine de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$ ssi elles sont de même type (ellipse, parabole, hyperbole)

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : N° 180

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Coniques. Applications.

Autre sujet :

pas les si on fait pas le dev 1.

ssi $\mathscr{C}$ est propre.

B) Coniques barycentriques

Ici, $\mathscr{C}$ est une conique admettant 3 points A, B, C formant un vrai triangle.

Prop 42 : L'équation de $\mathscr{C}$ dans le rep. bar. (A,B,C) est de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, $pqr \neq 0$.

DV1

Th 43 : Par 5 points distincts A, B, C, D, E passe une conique (unique si 4 quelconques non alignés)

Prop 44 : $\mathscr{C}$ admet un centre ssi
$$S := p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq \neq 0.$$
Si c'est le cas, ses coord. sont $(1,1,1)\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Th 45 : Si $S > 0$, $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Si $S < 0$, $\mathscr{C}$ est une ellipse. Si $S = 0$, $\mathscr{C}$ est une parabole.

Prop 46 : Soit $M = (a,b,c) \in \mathscr{C}$. La tangente en M de $\mathscr{C}$ est donnée par : $(a,b,c)\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$

pquoi ici ? (ici affine $\mathbb{R}$)

C) ~~Birapport et conique propre~~

Déf 47 : Soit $m \in \mathscr{C}$. On note m^* l'ensemble des droites passant par m, puis $\pi_m : \mathscr{C} \to m^*$ (avec $\pi_m(m)$ tangente à $\mathscr{C}$ en m)

DV2

Prop 48 : Pour $m \in \mathscr{C}$, π_m est bijective. De plus, si $m \neq n \in \mathscr{C}$, $\pi_n \circ \pi_m^{-1} : m^* \to n^*$ est une homographie.

Cor 49 : Soit $\mathscr{C}$ propre d'image non vide et $m_1, \dots, m_4 \in \mathscr{C}$. Alors $[mm_1, mm_2, mm_3, mm_4]$ ne dépend pas du choix de $m \in \mathscr{C}$.

Th 50 : (Pascal) Soit $\mathscr{C}$ conique propre et a, b, c, d, e et $f \in \mathscr{C}$. Alors les points $(ab) \cap (de)$, $(bc) \cap (ef)$ et $(cd) \cap (fa)$ sont alignés.

IV - Coniques métriques

faire rien équa° grandeur

A) Première définition

Mettre un formulaire (cf Lantle p 253)

Déf 51 : On appelle conique métrique :

* soit un cercle
* soit 2 droites parallèles
* soit $\{M \in \mathscr{P}, \frac{MF}{MK} = e\}$ avec $F \in \mathscr{P}$ foyer, d droite appelée directrice, $e \geq 0$ l'excentricité et $K = \pi_d^{\perp}(M)$.

Th/Déf 52 : La droite passant par F et orthogonale à d est axe de symétrie de $\mathscr{C}$, appelé axe focal.

Th 53 : (Classification des coniques métriques) cf annexe.

Prop 54 : Les rayons parallèles à l'axe focal d'une parabole (et réfléchis dessus) passent par F.

Appl 55 : Antenne parabolique, phares d'auto.

B) Définition bifocale

Prop 56 : $\mathscr{C}$ à centre admet deux axes de symétrie

Cor 57 : Les coniques à centre possèdent deux foyers et deux directrices.

Th 58 : Soit $F \neq F'$, $2a > 0$. Alors $\{M, MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse de foyers F et F' et $\{M, |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperbole de foyers F et F'.

Th 59 : Tout rayon incident partant d'un des foyers et réfléchi sur l'ellipse arrive à l'autre foyer.

Appl 60 : Voûte elliptique (métro de Paris, Eglise de Cuttlec)

Th 61 : Tout rayon incident est. d'une hyperbole dirigé vers F, (se trouvant à l'int. d'une branche) est réfléchi sur la branche vers l'autre foyer.

C) Définition polaire des coniques propres

Th 62 : Les coniques ont pour équation polaire :
$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \text{ (ellipse)}, \quad r = \frac{p}{1 + \cos\theta} \text{ (parabole)}$$
$$r = \frac{-p}{1 - e\cos(\theta)} \text{ (hyperbole)} \quad \text{avec } p = eh$$

force centrale de centre O ou vrai de centre O ?

Th 63 : Si la trajectoire central de centre O est une conique avec O un foyer, alors $a = -\gamma \frac{x}{|x|^3}$, avec $\gamma > 0$ si $\mathscr{C}$ est une ellipse, $\gamma < 0$ sinon.

accélération

mettre une équa diff

Th 64 : La réciproque est vraie. ← Faux

Appl 65 : Le mouvement d'une planète P est une ellipse

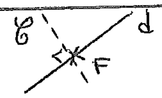
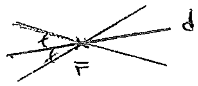
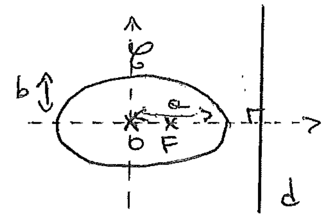
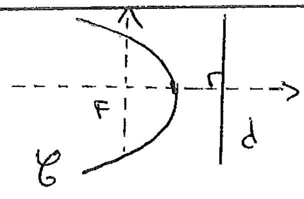
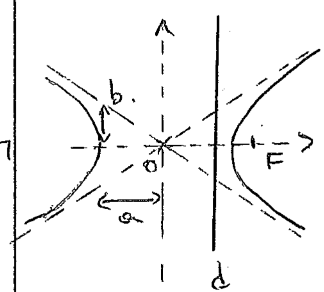
ne sert à rien !

→ manque des hypothèses ?

VIGNE Florian

N°180

Annexe

Foyer F et directrice d	Excentricité e	Conique	Dessin
$F \in d$	$e=0$	point F.	× F
	$0<e<1$	$\emptyset$	
	$e=1$	droite orthogonale à d en F	
	$e>1$	deux droites sécantes	
$F \notin d$ $h = d(F,d)$	$e=0$	point F	× F.
	$0<e<1$.	**ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ $a = \frac{eh}{1-e^2}$; $b = a\sqrt{1-e^2}$ dans le repère : $\begin{cases} X = x + \frac{eh}{1-e^2} - \frac{eh}{1+e} \\ Y = y. \end{cases}$	
	$e=1$	**parabole** $Y^2 = h(h-2x)$.	
	$e>1$	**hyperbole** $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ $a = \frac{eh}{1-e^2}$; $b = a\sqrt{e^2-1}$ dans le repère $\begin{cases} X = x - a - \frac{eh}{e+1} \\ Y = y \end{cases}$	

LAVIGNE Florian

2 N°18C

Bon dev. si on a pas envie de faire de coniques

Rq : on peut rajouter une partie si qd la conique est dégénérée !

DV1 : Conique passant par 5 points (Eiden, Géo. analytique, p52)

Rq : Si 4 de ces points sont alignés sur une droite Δ, toute conique réunion de Δ et d'une droite contenant le 5^e convient.

On se limite donc au cas où quatre points quelconques ne sont pas alignés. Il existe donc 3 parmi ces cinq points qui forment un triangle non aplati. On suppose que c'est ABC. Posons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques de D et E. Une conique $\mathcal{C}$ passe par A, B, C, D et E ssi son équation est de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$ avec (p,q,r) solution de $(S) \begin{cases} py_1z_1 + qz_1x_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qz_2x_2 + rx_2y_2 = 0 \end{cases}$

Ce système a un rang ≤ 2. Supposons qu'il ne vaut pas 2. Alors $d_1 := x_1x_2(z_1y_2 - z_2y_1)$ $d_2 := y_1y_2(x_1z_2 - x_2z_1)$ et $d_3 := z_1z_2(y_1x_2 - y_2x_1)$ sont nuls.

* Si $D, E \notin (BC)$, alors $x_1, x_2 \neq 0$. Donc $d_1 = 0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$
  Alors A, D et E sont alignés
  si $y_1 = 0$, alors $D \in (AC)$ puis A, D, C et E seraient alignés.
  Donc $y_1 \neq 0$. De même $y_2 \neq 0$.
  D'où $x_1z_2 - x_2z_1 = 0 \iff d_2 = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$,
  ce qui signifierait que B, D, E (et A) seraient alignés,
  Donc ce cas est impossible.
* Si $D \in (BC)$, alors $x_1 = 0$. De plus $x_2 \neq 0$ et $y_1 z_1 \neq 0$.
  Alors $d_2 = -y_1y_2x_2z_1$ et $d_3 = z_1z_2y_1x_2$ ce qui donne l'équivalence
  $d_2 = d_3 = 0 \iff y_2 = 0$ et $z_2 = 0$
  Or, si $y_2 = z_2 = 0$, $E = A$ ce qui est contradictoire.

Ainsi (S) est de rang 2 et admet une droite vectorielle de solutions. Les équations des coniques obtenues étant toutes proportionnelles, nous avons bien établi qu'une conique $\mathcal{C}$ et elle est unique

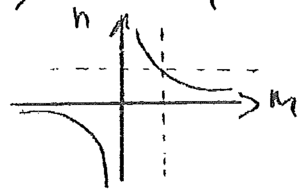
En fait (S) est l'$\cap$ de deux plans : un syst de 2 équa° à 3 inconnues
$\rightarrow$ a une solution.
Ainsi le ♡ du dvt est de démontrer l'unicité.

MIGNE Florian

DV2 : Birapport et conique
(Audin, Géométrie)

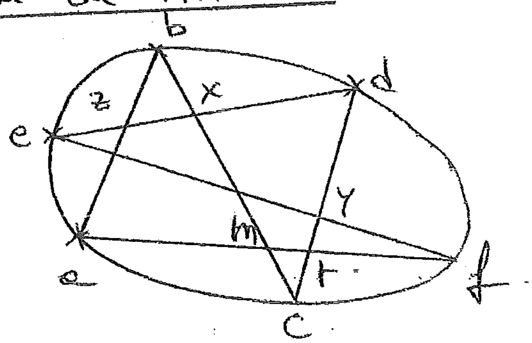
Preuve prop 48 :

* Toute droite D de m^* coupe $\bar{\mathcal{C}}$ en m la conique projective. Par la prop 85, il existe un unique point $x \in \bar{\mathcal{C}}$ avec $D \cap \bar{\mathcal{C}} = \{m, x\}$, car $\bar{\mathcal{C}}$ est propre.
Donc π_m est bijective.
* Choisissons mn droite à l'infini et $\mathcal{P}_2$ plan affine complémentaire. Fixons $\mathcal{C}_2 = \bar{\mathcal{C}} \cap \mathcal{P}_2$ conique affine propre, $\mathcal{C}_2$ admet deux points à l'infini. Par classification des coniques affines propres, c'est une hyperbole.
Il existe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel son équation devient $x^2 - y^2 = 1$. Ainsi dans le repère $(O, \vec{i}+\vec{j}, \vec{j}+\vec{i})$ elle devient $xy = 1$. Quitte à permuter, on a que m est la direction des abscisses et n celle des ordonnées les éléments de m^* (resp. n^*) sont les droites horizontales (resp. verticales).



En ces coordonnées, $\pi_n \circ \pi_m^{-1}$ s'exprime comme $a \mapsto 1/a$ qui est une homographie.

Preuve du th. 50.



Soit $z = ed \cap ba$ $\quad x = ed \cap bc$
$y = ef \cap dc$ $\quad t = af \cap dc$
et $m = ef \cap bc$.

On a :

$$[e,z,x,d] = [be, bz, bx, bd]$$
$$= [be, ba, bc, bd]$$
$$= [fe, fa, fc, fd] = [fy, ft, fc, fd]$$
$$= [y, t, c, d].$$

La perspective par rapport à m de (ed) sur (dc) envoie e sur y, x sur c et d sur d. Le birapport étant conservé, elle envoie z sur t. Donc z, m et t sont alignés.

Leçon 170 : Coniques. Applications

I Exercices

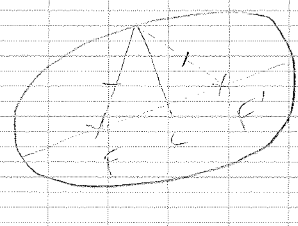
1) Donner les élts caractéristiques de $5x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6y - 6\sqrt{3}x = 5$

↳ jolie hyperbole ayant roté de $\pi/3$ ou $\pi/6$ ou

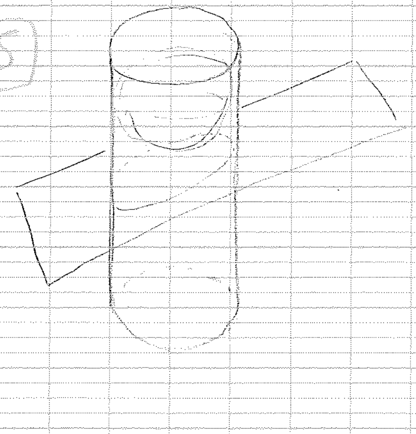
2) Combien de coniques projectives sur $\mathbb{F}_q$
(utiliser le fait que c'est un ev de dim pour b de réduire les fq. sur $\mathbb{F}_q$)

3) $\cap$ d'un cylindre et d'une ellipse.

4) $d(C, F)$ en fonc° de a et b pour une ellipse ?
centre foyer demi-axes



5)



Un cylindre coupé par un plan ($\cap$ = ellipse).
Une bille dedans qui tombe. (de m̃ diam que le cylindre)
En quel pt touche-t-elle le plan ?
(réponse : un des foyers)

6) Mq deux coniques sont semblables si elles ont m̃ excentricité