171*

NOM : LEROUVILLOIS Prénom : Vincent Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Autre sujet : Réf. Gourdon, Grifone, Delaumandie 171

. FGN3

. DEV1 → FGN3 DEV2 → Rouvière

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, que l'on supposera de dimension finie n dans la majorité des cas.

I - Formes quadratiques réelles.

1) Formes bilinéaires symétriques

Def 1: Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport aux deux variables i.e $\forall x\in E$, $\varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ et $\forall y \in E$, $\varphi(\cdot,y) : x \mapsto \varphi(x,y)$ sont des formes linéaires.

Ex 2: - Si α et β sont des formes linéaires, $(x,y)\mapsto \alpha(x)\beta(y)$ est une forme bilinéaire

- $\det : \begin{cases} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\binom{a}{b},\binom{c}{d}\right) \longmapsto ad-bc\end{cases}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Def 3: Une forme bilinéaire est de plus symétrique si $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

Ex 4: . Sur $M_n(\mathbb{R})$, $Tr : (A,B) \mapsto Tr(AB)$ est une forme bil. symétrique.

. Sur $L^2(\mathbb{R})$, $(f,g) \mapsto \int_{\mathbb{R}} fg\,dx$ est bilinéaire symétrique.

Def 5: Si E est de dimension finie n et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base, on définit la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ par :

$\boxed{M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\varphi(e_i,e_j)\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]^2}}$ ($M\in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi$ est symétrique)

Prop 6: M est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ si, et seulement si $\forall (x,y)\in E\times E$, $\boxed{\varphi(x,y) = {}^tXMY}$ où X,Y sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Prop 7 (Changement de base) Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors $\boxed{M' = {}^tPMP}$ avec $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$

Rq 8: Pour tout changement de base, $rg(M') = rg(M)$.

On peut définir $\boxed{rg(\varphi) = rg(M)}$, qui ne dépend pas du choix de la base.

Def 9: Soit $\Phi : \begin{cases} E \to E^* \\ y \mapsto \varphi(\cdot,y)\end{cases}$. On définit le rang et le noyau de φ.

. le rang de φ est le rang de Φ et le noyau de φ est le noyau de Φ

$Ker\,\varphi = \{y\in E \,/\, \forall x\in E, \varphi(x,y) = 0\}$

Prop 10. $Ker(\varphi) = Ker(Mat_{\mathcal{B}}(\varphi))$ pour une base quelconque $\mathcal{B}$

On a donc $\boxed{\dim E = rg(\varphi) + \dim(Ker\,\varphi)}$

Def 11: φ est non dégénérée si $Ker\,\varphi = \{0\}$

2) Formes quadratiques

Def 12 Une forme quadratique sur E est une application de la forme $q : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x,x)\end{cases}$ où φ est une forme bilinéaire symétrique

Not 13: On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\mathcal{L}^2_S(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.

Prop 14: (Forme polaire) $\forall q\in Q(E)\, \exists!\, \varphi_q \in \mathcal{L}^2_S(E)$ telle que $\forall x\in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. φ_q est appelée forme polaire de q.

et on a $\forall (x,y)\in E^2$, $\boxed{\varphi_q(x,y) = \dfrac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2}}$

On a donc un isomorphisme d'espace vectoriel $\boxed{Q(E) \cong \mathcal{L}^2_S(E)}$

Ex 15: . Si $(E,\langle|\rangle)$ est un espace préhilbertien, alors $x\mapsto \|x\|_2^2 = \langle x|x\rangle$ est une forme quadratique

. Si f est une application de classe $\mathcal{C}^2 : U\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $h \mapsto D^2f_x(h,h)$ est une forme quadratique $\forall x\in U$

Def 16. Si $\dim(E) = n$ et $\mathcal{B}$ est une base de E et $q\in Q(E)$, on définit la matrice de q dans $\mathcal{B}$, le rang de q et le noyau de q comme la matrice, le rang et le noyau de φ_q, la forme polaire.

Rq 17: $\boxed{Q(E) \cong \mathcal{L}^2_S(E) \cong S_n(\mathbb{R})}$

Prop 18. Si $\dim(E)=n$, les formes quadratiques sur E s'identifient avec les polynômes homogènes de degré 2 par le choix d'une base

Ex 19: $q : \begin{cases}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto 3x^2+y^2+2xy-4xz\end{cases}$ Dans la base canonique,

$Mat(q) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $rg(q) = 3$, q est non dégénérée.

polyg hom de deg 2 $\longleftrightarrow$ $\mathcal{L}^2_S(E) \longrightarrow Q(E)$

dim $\longleftrightarrow$ $S_n(\mathbb{R})$

3) Formes quadratiques positives

Def 20: Une forme quadratique q sur E est dite :

- positive si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$ $\quad (q \in q^+(E))$
- définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$. $\quad (q \in q^{++}(E))$

Rq 21: Toute forme quadratique définie positive est non dégénérée.

Ex 22: Si $(E, \langle | \rangle)$ est un espace préhilbertien, $\|\cdot\|_2^2$ est définie positive. Et par définition, toute forme quadratique définie positive a pour forme polaire un produit scalaire.

Prop 23: Si $\dim(E) = n$ et $\mathcal{B}$ est une base. $\quad M = Mat_{\mathcal{B}}(q) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

- q est positive $\iff M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- q est définie positive $\iff M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Prop 24: (Inégalité de Schwarz) Si q est positive, alors $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \ |\varphi_q(x,y)|^2 \leq q(x)\, q(y)}$

Si de plus q est définie positive, alors il y a égalité ssi x et y sont liés.

4) Orthogonalité, isotropie

Def 25: Soit (E, q) un espace muni d'une forme quadratique. x et y sont orthogonaux si $\varphi_q(x,y) = 0$.

Si $A \subseteq E$, on note $A^{\perp} = \{ y \in E \,/\, \forall x \in A, \ \varphi(x,y) = 0 \}$, c'est un espace vectoriel.

Rq 26: $E^{\perp} = Ker(q)$, $\quad A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$

Prop 27: Si E est de dim finie et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel

$$\boxed{\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim(F \cap Ker(q))}$$

Si q est non dégénérée, $\quad F \oplus F^{\perp} = E$ et $F = F^{\perp\perp}$

C-ex 28: Si $q : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 \end{cases}$, $F = Vect(\langle (0,1) \rangle)$ $\quad F^{\perp\perp} = \mathbb{R}^2$.

Def 29: Le cône isotrope est $C_q = \{ x \in E \,/\, q(x) = 0 \}$. $\quad (C_q \supseteq Ker(q))$

Prop 30: Si q est positive, $C_q = Ker(q)$

II - Réduction des formes quadratiques réelles

1) Loi de Sylvester $\quad (\dim(E) = n)$

Def 31: Une base $\mathcal{B}$ de E est dite q-orthogonale si $\boxed{\forall (e_i, e_j) \in \mathcal{B}^2, \ \varphi_q(e_i, e_j) = 0}$ ssi $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

Prop 32: Si E est de dimension finie, alors il admet une base q-orthogonale. Matriciellement, $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tPMP$ est diagonale.

Rq 33: Avec le théorème spectral on a un résultat plus fort :

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \ \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tPMP \text{ est diagonale.}$$

Rq 34: Si q est définie positive, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt fournit une base q-orthogonale dans laquelle, la matrice de q est I_n.

Thm 35: (Sylvester) Soit $q \in Q(E)$. Il existe un unique couple $(p, r-p)$ avec $p, r-p \in [\![0,n]\!]$ tel que il existe ~~une~~ base de E dans laquelle :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_{r-p} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}$$

Résultat impt.

$(p, r-p)$ est la signature de q. C'est un invariant de similitude pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence : $P.M = {}^tPMP$.

Rq 36:

- $p = \max_{F \text{ sev}} (\dim(F) \,/\, q|_F \text{ est définie positive})$, $r = rg(q)$
- p est aussi le nombre de valeurs propres > 0 de $Mat(q)$ dans une base quelconque.

Ex 37:

- $q_1 : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto Tr({}^tMM) \end{cases}$ est une forme quadratique de signature $(n^2, 0)$
- $q_2 : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto Tr(M^2) \end{cases}$ est une forme quadratique de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$
- $q_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{i \neq j} x_i x_j \end{cases}$ est de signature $(1, n-1)$

2) Calcul pratique par la méthode de Gauss

Prop 38: Il existe un algorithme (de Gauss) permettant d'écrire toute forme quadratique q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes : $\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i(x)^2 \ \forall x \in E}$ (voir annexe)

Rq 39: $r = rg(q)$ et $p = \#\{a_i > 0 \,/\, i \in [\![1, r]\!]\}$

Ex 40: $q : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x^2 - 2y^2 + xz + yz \end{cases} \leadsto q(x,y,z) = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 - \frac{3}{8}z^2$

Dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $Mat(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de signature $(1,2)$

3) Réduction simultanée

Prop 41: Soit $q \in Q(E)$ et $q' \in Q^{++}(E)$, définie positive. Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(q') = I_n$ et $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale

Appli 42: En utilisant la densité de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, on montre que $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}), \ \det(A) + \det(B) \leq \det(A+B)}$

Appli 43: $\forall A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\boxed{\forall \lambda \in [0,1], \ \det(\lambda A + (1-\lambda) B) \geq \det(A)^{\lambda} \det(B)^{1-\lambda}}$ et ; on a égalité que si $A = B$ ou $\lambda \in \{0,1\}$.

C'est la stricte log-convexité du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

DEV 1

Coro 44: (Ellipsoïde de John-Loewner)

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

Appli 45: Tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est un sous-groupe de $O(q)$ pour q une certaine forme quadratique définie positive sur E.

III - Applications

1) Classification des quadriques d'un espace affine euclidien

Def 46: Soit $(E, \langle \cdot \rangle)$, un espace Euclidien. Une quadrique est l'ensemble des solutions de $\boxed{q(x) + \ell(x) + c_0 = 0}$ où q est une forme quadratique non nulle, ℓ est une forme linéaire et $c_0 \in \mathbb{R}$.

Rq 47: Matriciellement, il s'agit des solutions de $\boxed{{}^tXAX + {}^tBX + c_0 = 0}$ avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $(A \neq 0)$, $B \in$) et $c_0 \in \mathbb{R}$

Rq 48: Si on change d'origine Ω, dans le repère $(\vec{O\Omega}, \mathcal{B})$, l'équation devient ${}^tX'AX' + (2\,{}^t\vec{O\Omega} A X' + {}^tBX') + ({}^t\vec{O\Omega} A \vec{O\Omega} + B\vec{O\Omega} + c_0) = 0$

Coro 49: Par le théorème spectral, on peut trouver une base orthogonale $\mathcal{B}$ telle que A soit diagonale. Puis en changeant d'origine Ω, on se ramène dans le repère $(\Omega, \mathcal{B})$ à une équation sans partie linéaire : ${}^tXDX = C$ si q est non dégénérée (A inversible). On distingue ensuite $C = 0$ ou $C \neq 0$.

Prop 50: Si $\dim E = 2$, les quadriques sont appelées coniques.

Les coniques non dégénérées sont :
- les ellipses si q est de signature $(2,0)$ ou $(0,2)$.
- les hyperboles si q est de signature $(1,1)$

Les coniques dégénérées sont les réunions de droites, les points, les paraboles.

2) Etude locale des fonctions différentiables

Def 51: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la matrice Hessienne de f par : $\boxed{Hess(f)_x = \left(D^2 f_x(e_i, e_j)\right)_{i,j}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Prop 52: Si f est $\mathcal{C}^2$ et $x \in U \,/\, Df_x = 0$. Alors, par un développement de Taylor,
- Si $Hess(f)_x \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors x est un minimum local de f.
- Si $Hess(f)_x$ est de signature $(p, r-p)$ avec $p \geq 1$ et $r-p \geq 1$, x n'est pas extremum local

Lemme 53 (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $g : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\boxed{A = {}^tg(A) A_0 g(A) \ \forall A \in V}$

DEV 2

Th 54: (Lemme de Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^3$ avec U ouvert tel que $0 \in U$. On suppose $f(0) = 0$, $Df_0 = 0$ et $D^2 f_0$ non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors, $\exists W$ voisinage de 0 et $\varphi : W \to \varphi(W)$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\varphi(0) = 0$ et $\boxed{\forall x \in W, \ f(x) = \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x)}$

Appli 55: Position de surfaces régulières par rapport au plan tangent.

(Algorithme de Gauss)

Soit $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique que l'on désire mettre sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i^2(x)$ avec $(\varphi_1 \dots \varphi_r)$ des formes linéaires indépendantes.

Nous procédons récursivement pour réduire le nombre de variables $x_1, \dots, x_n$.

1er cas: $\exists i \in [\![1,n]\!] / m_{ii} \neq 0$ (Il y a un carré non nul) (par exemple $i = 1$)

On écrit $\boxed{q(x) = m_{11}\left(x_1 + \frac{1}{2m_{11}} \sum_{j=2}^{n} m_{1j} x_j\right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n)}$ avec $q'(x_2 \dots x_n) = \sum_{i=2}^{n} m_{ii} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j - \frac{1}{4m_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} m_{1j} x_j\right)^2$

↳ on applique l'algorithme à q'

2ème cas: $\forall i \in [\![1,n]\!], m_{ii} = 0$. Soit q est nulle et c'est terminé. Soit $\exists m_{ij} \neq 0$ (Par exemple $a_{12} \neq 0$)

On écrit $q(x) = a_{12} x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$ où
- $B(x_3 \dots x_n) = \frac{1}{m_{13}} \sum_{j=3}^{n} m_{1j} x_j$, forme linéaire
- $C(x_3 \dots x_n) = \frac{1}{m_{23}} \sum_{j=3}^{n} m_{2j} x_j$, forme linéaire
- $D(x_3, \dots, x_n) = \sum_{3 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j$, forme quadratique

$$q(x) = a_{12}\left(x_1 + \frac{C}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{B}{a_{12}}\right) + \underbrace{D - \frac{BC}{a_{12}}}_{q'}$$

$$\boxed{q(x) = \frac{a_{12}}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a_{12}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a_{12}}\right)^2\right] + q'(x_3, \dots, x_n)}$$

↳ on applique l'algorithme à q'

Exemple: $q(x,y,z) = xy + yz + xz$

$q(x,y,z) = (x+z)(y+z) - z^2$

$= \frac{1}{4}\left[(x+y+2z)^2 - (x-y)^2\right] - z^2$

∴ On en déduit que q est de signature $(1,2)$

Sign du det 2×2 ? $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc = \frac{1}{4}\left((a+d)^2 - (a-d)^2\right) - \frac{1}{4}\left((b+c)^2 - (b-c)^2\right)$
$= (2,2)$