(162)

NOM : PASCAL **Prénom :** Barbara **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 162 : Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Autre sujet : Références. Beck, Objectif Agrégation, Calderò H2G2 Tome 1, Grifone, Algèbre Linéaire, Serre, Les Matrices, Dumas, Modélisation à l'oral

I) Systèmes linéaires, opérations élémentaires

1) Définitions, premières propriétés ($\mathbb{K}$ corps)

Déf 1 : Un système linéaire de p équations à n inconnues est une équation (S) : $AX=b$, $b\in\mathbb{K}^p$, $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$. On lui associe le système homogène (S_H) $AX=0$.

Ex 2 : $\begin{pmatrix}2&5\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+5y=1\\-4x+y=3\end{cases}$ 2 équations, 2 inconnues.

Déf 3 : Si $A\in GL_n(\mathbb{K})$, (C) $AX=b$ est un système dit de Cramer.

Thm 4 (Cramer) Le système de Cramer (C) admet une unique solution : $x=A^{-1}b$. $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ est donné par : $x_i=\dfrac{\det(C_1,\dots,C_{i-1},b,C_{i+1},\dots C_n)}{\det(A)}$ où $C_1,\dots,C_n$ sont les colonnes de A.

Ex 5 : $A=\begin{pmatrix}2&5\\-4&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. La solution de (C) est ${}^t(x\ y)$: $x=-7/11$ et $y=5/11$.

Déf 6 : Le rang du système (S) : $AX=b$ est le rang de $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Thm 7. On considère $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $b\in\mathbb{K}^p$ (S) : $AX=b$ (S_H) $AX=0$. On note $r=rg(A)$. Alors

(i) Les solutions de (S_H) forment un sous-ev. de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n-r$, noté $\ker(A)$.

(ii) (S) admet des solutions ssi $b\in Im(A)$. Alors, l'ensemble des solutions de (S) est un espace affine dirigé par $\ker(A)$, de dim $n-r$.

App 8 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\mid AX=XA\}$ et $\mathbb{K}(A)=\{P(A), P\in\mathbb{K}[X]\}$. Alors $C(A)=\mathbb{K}(A)\Leftrightarrow \chi_A=\mu_A$ (poly. minimal de A)

Ex 9 : Les solutions de $\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ds $\mathbb{R}^2$ sont $\left\{\begin{pmatrix}\frac{-3}{\ }\pm\lambda\\ \ \\ \lambda\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$, de dim 1.

Rque 10 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la méthode de Cramer requiert $O(n^2 n!)$ opérations !

Déf 11 : On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures.

Prop 12 [Méthode de remontée] Si $A\in T_n^+(\mathbb{K})\cap GL_n(\mathbb{K})$ alors la résolution explicite de $AX=b$ nécessite $O(n^2)$ opérations via $x_n=\frac{1}{a_{nn}}b_n,\dots,$ $x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-\dots-a_{1n}x_n)$.

Cor 13 : L'inverse de $A\in T_n^+(\mathbb{K})\cap GL_n(\mathbb{K})$ est aussi triangulaire supérieure.

2) Opérations élémentaires. Méthode de Gauss

Idée : On cherche $M\in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $MAX=Mb$ soit « facile » à résoudre.

Déf 14 : On note $(E_{i,j})$ la base canonique de $GL_p(\mathbb{K})$

(i) On note $T(a)_{ij}=I_p+aE_{ij}$, appelée matrice de transvection $(i\neq j)$

(ii) On note $D(a)_i=I_p+(a-1)E_{ii}$, appelée matrice de dilatation $(i\in\{1,\dots,p\})$

(iii) On note $P(i,j)=I_p-E_{ii}+E_{ij}-E_{jj}+E_{ji}$ appelée matrice de transposition $(i\neq j)$

Prop 15 : Avec les notations ci-dessus, on a $\det(T(a))=1$, $\det(D(a))=a$, $\det(P(i,j))=-1$

Prop 16 : La multiplication à gauche par :

(i) $T(a)_{ij}$ réalise l'opération élémentaire $L_i\leftarrow L_i+aL_j$

(ii) $D(a)_i$ réalise l'opération élémentaire $L_i\leftarrow aL_i$

(iii) $P(i,j)$ réalise l'opération élémentaire $L_i\leftrightarrow L_j$.

Thm 17 : Si $a\in\mathbb{K}^*$, les opérations élémentaires

DV1 (FGN, Alg 2)

définies ds la Prop16 laissent le rang de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ inchangé (i.e $rg(MA) = rg(A)$ si M est un produit de matrices de types de la Déf14).
De plus les solutions de (S): $AX = b$ sont exactement les solutions de (S') $MAX = Mb$.

Rque18: En transposant, on déduit de la Prop16 les matrices correspondant aux opérations élémentaires sur les colonnes, par multiplication à droite.

Déf19: Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on appelle pivot d'une ligne de A (non nulle) le coef. non nul situé le plus à gauche.

Déf20: Une matrice est dite échelonnée (en lignes) lorsque :
(i) si une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi
(ii) le pivot d'une ligne est strictement « plus à droite » que les pivots des lignes précédentes.

Ex21: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Thm22: [Pivot de Gauss] $\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ échelonnée qui est obtenue à partir de A grâce à des opérations élémentaires sur les lignes (cf. algorithme en annexe). On dit que A' est une réduite échelonnée de A.

Ex23: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ se met sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

Cor24: la méthode du pivot de Gauss permet de déterminer le rang d'une matrice. il s'agit du nombre de pivot de sa réduite échelonnée.

App25: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 11 & 0 \end{pmatrix}$, $rg(A) = 3$ (cf. Ex23).

App26: Pour l'action de $GL_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $P.A = PA$ toute orbite contient une matrice échelonnée.

App27: On trouve en annexe la méthode d'élimination pour la résolution des systèmes linéaires, basée sur l'utilisation du pivot de Gauss.

Prop28: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la mise en œuvre du pivot de Gauss nécessite $O(n^3)$ opérations. Elle n'est pas stable numériquement (division par un pivot « petit »).

II) Méthodes de factorisation des matrices inversibles

1) Factorisation LU:

Prop29: Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = LU$ où $U \in T_n^+(\mathbb{K})$, $L \in T_n^-(\mathbb{K})$ (matrices triangulaires inférieures) avec $diag\,L = (1,\dots,1)$ la résolution de (S): $AX = b$ se fait en 2 étapes :
- on résout $LY = b$ par méthode de descente
- on résout $Y = UX$ par méthode de remontée.

Ce qui nécessite $O(n^2)$ opérations

Thm30 [Factorisation LU] Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ alors A admet une décomposition $A = LU$ $L \in T_n^-(\mathbb{K})$, $U \in T_n^+(\mathbb{K})$.
De plus cette factorisation est unique.

Ex31: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & -9/20 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = LU$.

Rque32: La factorisation LU effective correspond au pivot de Gauss sans échange de lignes (ni dilatation)

Ex33: les matrices symétriques définies positives admettent toujours une décomposition LU.

Cor34: Si $A = LU$ admet une telle décomposition alors $\det A = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$.

Ex35: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -90$.

App36: Si $A \in SDP_n$ (sym. déf. pos.) elle admet une unique factorisation $A = BB^T$ où $B \in T_n^-(\mathbb{R})$ et $b_{ii} > 0, \forall i$. on l'appelle factorisation de Cholesky.

Cor37: Une matrice $A \in SDP_n$ ssi elle admet une factorisation de Cholesky.

2) Factorisation QR et matrices de Householder

Déf 38: Si $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on appelle matrice de Householder associée à v : $H(v) = I_n - \frac{2vv^*}{v^*v}$. Par convention $H(0) = I_n$.

Prop 39: $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $H(v)$ est unitaire et hermitienne.

Thm 40: Soit $(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ tq $\sum_{i=2}^n |a_i| > 0$. Il existe H matrice de Householder tq les $(n-1)$ dernières composantes de Ha soient nulles. Plus précisément :
$H(a \pm \|a\|_2 e_1) . a = \mp \|a\|_2 e_1$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Thm 41: [Factorisation QR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe Q unitaire, produit de n matrices de Householder et $R \in T_n^+(\mathbb{C})$ telles que $A = QR$, $R = (r_{ij})$.
De plus on peut imposer $r_{ii} \geq 0$, $\forall i$.
Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, la factorisation $A = QR$ est unique.

Rque 42: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il en est de même pour Q et R et Q est de surcroît orthogonale.

Rque 43: On peut voir la décomposition $Q.R$ comme un procédé de Gram-Schmidt. Néanmoins, au point de vue numérique ce n'est pas efficient (erreurs d'arrondi).

III) Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Dans cette partie on écrit $A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$, D diagonale, $F \in T_n^+$, $E \in T_n^-$ à diagonale nulle.

1) Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, de relaxation :

Déf 44: Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on appelle décomposition régulière de A, un couple $(M,N) \in GL_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $A = M - N$, avec M « facilement inversible » (i.e. $MX = b$ se résout rapidement)

Déf 45: Une méthode itérative basée sur une telle décomposition consiste à construire $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tq : $u_0 \in \mathbb{C}^n$ et $Mu_{k+1} = Nu_k + b$ ($k \in \mathbb{N}$).
On dit qu'une telle méthode est convergente si $\forall u_0 \in \mathbb{C}^n$, $\forall b \in \mathbb{C}^n$ $u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} u$ où $u = A^{-1}b$.

① : $\neq$ ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($\neq$ calcul formel)

Thm 46: La méthode itérative associée à la décomposition (M,N) de A converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$ où $\rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(B)\}$ $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rayon spectral.

Thm 47: Soit $A \in S_n^{++}$, pour une décomposition régulière $A = M - N$ on a $M^* + N \in S_n(\mathbb{R})$. Si de plus $M^* + N \in S_n^{++}$ la méthode itérative associée converge.

Ex 48: (i) On appelle méthode de Jacobi la méthode associée à $M = D$, $N = E + F$, si $D \in GL_n(\mathbb{C})$.
(ii) On appelle méthode de Gauss-Seidel la méthode associée à $M = D - E$, $N = F$, si $D \in GL_n(\mathbb{C})$.

Thm 49: Soit A tridiagonale. Si les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi convergent alors pour $J = D^{-1}(E+F)$, $G = (D-E)^{-1}F$ on a $\rho(G) = \rho(J)^2$.

DV2

Déf 50: On appelle méthode de relaxation de paramètre $\omega > 0$ associée à la décomposition de A :
$M = \frac{D}{\omega} - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$.

Rque 51: $\omega = 1$ donne la méthode de Gauss-Seidel.

Thm 52: La méthode de relaxation ne peut converger que si $\omega \in]0,2[$. Réciproquement, si $A \in S_n^{++}$, elle converge pour tout $\omega \in]0,2[$.

2) Contrôle de l'erreur. Conditionnement.

Déf 53: Soit $|||\cdot|||$ norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle conditionnement de $A \in GL_n(\mathbb{C})$ par rapport à $|||\cdot|||$: $\mathrm{cond}(A) \underset{(\text{déf})}{=} |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$.

Thm 54: Soient $A, A' \in GL_n(\mathbb{C})$, $b, b' \in \mathbb{C}^n$ avec $b \neq 0$.
(i) Soient u, u' solutions de $Au = b$, $Au' = b'$. On a
$\frac{\|u - u'\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}$ (optimale)
(ii) Soient u, u' les solutions de $Au = b$ et $A'u' = b$. On a
$\frac{\|u - u'\|}{\|u'\|} \leq \mathrm{cond}\, A \frac{|||A - A'|||}{|||A|||}$.

Annexe:

Algorithme de Gauss : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ $(A \neq 0_{p,n})$, $L_1, \dots, L_p$ les lignes de A.

Etape 0: Si L_j est la ligne dont le pivot est le plus à gauche on effectue $L_j \leftrightarrow L_1$, ce qui revient à multiplier à gauche par $M_0 = I_p + E_{1j} + E_{j1} - E_{11} - E_{jj}$. On considère alors $A' = M_0 A$

Etape 1: On note a_{11} le pivot de L_1', première ligne de A', et pour $i = 2, \dots, p$ on effectue $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$. Ce qui revient à multiplier à gauche par M_1, produit de $p-1$ matrices élémentaires. On a alors $A'' = M_1 M_0 A$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{11} & \text{---} \\ \vdots \quad \vdots & 0 & B \\ 0 \cdots 0 & 0 & \end{pmatrix}$

Etape 2: On effectue alors les mêmes opérations sur B (en utilisant le calcul par blocs) et on itère le procédé jusqu'à avoir $T \underset{(\text{déf})}{=} M_k \cdots M_0 A$ échelonnée.

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & 9/5 \end{pmatrix}$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/20 & 1 \end{pmatrix}$ et $A'' = T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$. On obtient la décomposition LU de A via $U = T$, $L = (M_1 M_0)^{-1}$.

Méthode de Householder pour la factorisation QR

On cherche $H_1, \dots, H_{n-1}$ des matrices de Householder telles que $H_{n-1} \cdots H_1 A \in T_n^+(\mathbb{C})$.

On pose $A_1 \underset{(\text{déf})}{=} A$, alors $A_k = H_{k-1} \cdots H_1 A$, $k \geq 1$ est de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & & \\ 0 & \times & \times & & \\ \vdots & 0 & \times & (X) & \\ \vdots & \vdots & \times & & \\ 0 & 0 & \times & & \end{pmatrix}$ $a_k \in \mathbb{C}^{n-k+1}$

← k-ième ligne

a_k extrait de la k colonne

Si $\sum_{i=k+1}^{n} |a_{ik}| > 0$, on se donne $v_k \in \mathbb{C}^{n-k+1}$ tq les composantes de $H(v_k) a_k \in \mathbb{C}^{n-k+1}$ soient toutes nulles sauf la première. Alors $H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(v_k) \end{pmatrix} = H(\tilde{v}_k)$ où $\tilde{v}_k \in \mathbb{C}^n$, $\tilde{v}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_k \end{pmatrix}$.

On itère le procédé jusqu'à $H_{n-1} \cdots H_1 A = Q \in T_n^+(\mathbb{C})$

Exemple de résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot. (cf ex 23 du plan)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3' = L_3 - 2L_1 \\ L_4' = L_4 - 4L_1}]{\substack{L_1 \\ L_2' = L_2 - L_1}} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ y + 2z = 5 \\ 3y + 12z = 21 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3'' = L_3' - L_2' \\ L_4'' = L_4' - 3L_2'}]{\substack{L_1 \\ L_2'}} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc le système admet pour unique solution $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$.

Méthodes Itératives de Résolution de Systèmes Linéaires Dumas, Modélisation à l'oral de l'agrégation

D Serre, Les Matrices ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Thm La méthode associée à la décomposition $A = M - N$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $N \in M_n(\mathbb{K})$ converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ (où $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)\}$ rayon spectral).

Dém Si la méthode est convergente alors, pour $b = 0$ on obtient $\lim_{m \to +\infty} (M^{-1}N)^m x_0 = 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{K}^n$

Autrement dit $\lim_{m \to +\infty} (M^{-1}N)^m = 0$, ce qui implique que $\rho(M^{-1}N) < 1$, puisque $\forall \lambda \in Sp(M^{-1}N)$ $(M^{-1}N)^m x_\lambda = \lambda^m x_\lambda$ qui tend vers 0 ssi $|\lambda| < 1$.

Pour la réciproque, on commence par démontrer :

Thm (Householder) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\|\ \|$ norme sur $\mathbb{C}^n$ telle que pour la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ on ait $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Dém. Par trigonalisation sur $\mathbb{C}$, il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T \underset{(def)}{=} U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Soit δ tel que $\forall i \in \{1, n-1\}$, $\sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}| \delta^{j-i} \leq \varepsilon$, on note alors $D_\delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \ldots, \delta^{n-1})$ et $T_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta$ et pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$ on pose

$|||B||| = \max\{\|(UD_\delta)^{-1} B (UD_\delta) x\|_\infty \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_\infty = 1\}$

Par construction $\rho(A) = \rho(T) = \max_i |t_{ii}|$ et $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$. De plus $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à $\|x\| = \|(UD_\delta)^{-1} x\|_\infty$ $\square$

Si $u_0 \in \mathbb{K}^n$ et $Mu_{k+1} = Nu_k + b$ avec $u_k \to A^{-1}b$

$e_k = u_k - A^{-1}b \to 0$

Or $e_k = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b - (M^{-1}Nu + M^{-1}b)$

$= M^{-1}N e_{k-1}$ puis $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$

Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, grâce au théorème de Householder, on se donne une norme subordonnée tq

$|||M^{-1}N||| < 1$ donc $\|e_k\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

et la méthode converge

__Exemple__: On note $A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$ D diagonale inversible

$\to$ __Jacobi__: $M = D$, $N = E+F$ $\quad \to$ __Gauss Seidel__ $M = D - E$, $N = F$

__Prop__ Soit A tridiagonale telle que $\mathrm{diag}(A) = D$ soit inversible, alors $J = I_n - D^{-1}A$ et $G = (D-E)^{-1}F$ vérifient $\rho(J)^2 = \rho(G)$

__Dém__ Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\chi_J(\lambda) = \det(\lambda I_n - D^{-1}(E+F))$

$= \det(D^{-1})\det(\lambda D - E - F)$

$\chi_G(\lambda^2) = \det(\lambda^2 I_n - (D-E)^{-1}F)$

$= \det((D-E)^{-1})\det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F)$

$= \lambda^n \det(D^{-1}) \det(\lambda D - \lambda E - \frac{1}{\lambda}F)$

Or $\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & -\lambda^{-1}F & (0) \\ \ddots & \lambda D & \ddots & \\ -\lambda E & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \end{pmatrix} = D(\lambda) \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & \lambda D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} D(\lambda)^{-1}$

où $D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda^n)$

donc $\chi_J(\lambda) = \chi_G(\lambda^2) \cdot \lambda^{-n}$

Q/

- Householder ds le cas $M^{-1}N$ diagonalisable ?
- Thm ≠ dém ? $AX = b$, $AX = 0$ $n = \mathrm{rg}A + \dim\ker(A)$ [illegible]
- Complexité de calculer l'inverse ? $O(n^3)$. Gauss (résoudre $Ax = e_i$ $i = 1..n$)
  $\Rightarrow x_i$ = ième colonne de A^{-1}
  ↳ Intérêt lorsqu'on veut résoudre ≠ts syst avec la même matrice.
  factorisation également bien pour ça.
- Qu'est-ce qu'un pivot qui "pose pb" ?
- [illegible] nulle où la condition nécessaire ? Bcp de cond qui valent cette condition ?

rectangle.

Rqs) - Méthode générale puis carrée et inv (Cramer). Espace solution ☺
- Matrice échelonnée → permet de faire plein de trucs.

/ - On sait que Gram Schmidt, il y a mieux

Rq :

- "On veut pas inverser la matrice" : FAUX, résoudre syst lin ≠ inverser
- ⚠ ≠ce calcul formel (Gauss) & anal. num ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) (itératives, QR.)
- Complexité de QR et LU → $O(n^3)$
- csq théoriques ! → GL_n connexe par arcs (= gén de $GL(E)$), gpe abéliens de type fini, Jordan, ext. algébriques, algo simplexe, ...
- syst ds $\mathbb{Z}$
- autres appli du pivot : rg, noyau, fq, ...
- "itératif" : suites déf par réc, Newton (inverser DF), ...
- csq de QR → ∃ une base orthonormale
- pivot G → base du noyau. Permet d'avoir ne syst d'éq de rg min
  → calcul de l'inverse (utile si plusieurs b)
- LU, si on n'a pas tous les $\Delta_k \neq 0$? : s'en rend compte en faisant le pivot
- pivot ds $\mathbb{Z}$ → inv de sim. → gpes abéliens.

(LU parallélisable ?)

- Complexité : en nb d'opérations ds le corps !!