161*

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie

Autre sujet : Application en dimension 2 et 3.

Audin

E désignera un espace vectoriel euclidien
$\mathcal{E}$ désignera un espace affine euclidien

I - Isométries affines et euclidienne

Définition 1 : Une application linéaire (resp. affine) entre espaces euclidiens (resp. affines) est une isométrie si pour tout vecteur u, $\|f(u)\| = \|u\|$ (resp. pour tout points A, B, $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$)

Exemple 2 : Id et $-Id$ sont des isométries d'espaces euclidiens. Une translation est une isométrie affine.

Proposition 3 : Une isométrie est injective. Comme on se limite à la dimension finie elle est bijective (Si de $E \to E$ ou de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$)

Remarque 4 : Il devient donc naturel de se limiter à l'étude des isométrie de E dans E (ou de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$).

Proposition 5 : Notons $O(E)$ (resp. $Isom(\mathcal{E})$) l'ensemble des isométries vectorielles (resp. affines). $O(E)$ et $Isom(\mathcal{E})$ sont des groupes.

Proposition 6 : Les symétries orthogonales euclidiennes et affines sont des isométries

Définition 7 : On appelle réflexion une symétrie par rapport à un hyperplan

Proposition 8 : Soit $F \subset E$ un sous espace euclidien stable par une isométrie. Alors $F^{\perp}$ est stable par cette isométrie.

de dim

Théorème 9 : Si $\dim E = n$, alors toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions avec $p \leq n$

Théorème 10 : Si $\dim \mathcal{E} = n$, alors toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexion avec $p \leq n+1$

Exemple 11 : Si $E = \mathbb{R}^2$, une rotation d'angle θ est le produit des symétries s_1 et s_2 où s_1 est la symétrie par rapport à D_1, s_2 est la symétrie par rapport à D_2 avec D_1 et D_2 les droites formant respectivement un angle de $\frac{\theta}{2}$ et θ avec l'axe des abscisses.

Définition 12 : On appelle déplacement une isométrie linéaire ou affine de déterminant positif. On note $O^+(E)$ (resp. $Isom^+(\mathcal{E})$) le sous groupe des déplacements.

Proposition 13 : Une isométrie est un déplacement ssi c'est le produit d'un nombre pair de réflexions

1/4

FGN, cf. 3.

DV1. **Théorème 14 :** Si $u \in O(E)$, et $r = rg(u - Id)$, alors u peut s'écrire comme produit de r réflexions, et r est minimal pour cette propriété.

II - Le groupe $O(n)$

Proposition 15 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée. Alors $f \in O(E) \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$ vérifie ${}^tMM = Id$

Définition 16 : On note $O(n) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = Id\}$

Proposition 17 : $O(n)$ est compact.

Proposition 18 : $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$

$O^+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$

$O^+(2) \simeq \mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$O^+(2)$ est commutatif

Proposition 19 : $O^+(2)$ est connexe par arc et $O(2)$ a deux composantes connexes par arc : $O^+(2)$ et $O^-(2)$

Proposition 20 : Réduction des isométries
Si $f \in O(E)$, il existe une base orthonormée dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \quad \text{où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on peut écrire $E = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$ avec V, W, P_i stables par f, $f_{|V} = Id_V$, $f_{|W} = -Id_W$ et $f_{|P_i}$ sont des rotations.

Proposition 21 : On en déduit que $O^+(n)$ est connexe par arc. $O(n)$ a deux composantes connexes par arc homéomorphes à $O^+(n)$.

Proposition 22 : $Isom^+(E)$ est connexe par arc. Celà justifie l'appellation "déplacement".

III - Classification des isométries en dimension 2 et 3

1 - En dimension 2

Les isométries euclidiennes sont composées de 0, 1 ou 2 réflexions.

Proposition 23 : Une isométrie en dimension 2 est soit l'identité (positive) soit une réflexion (négative) soit une rotation (positive).

Proposition 24 : Si s_D et $s_{D'}$ sont les symétries par rapport à D et D', on a

$$(u, s_{D'} \circ s_D(u)) = 2(D, D')$$

Proposition 25 : Si φ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$, il existe une isométrie ψ et une translation t_v de $\mathcal{E}$ telles que
- ψ a un ou plusieurs points fixes : $\mathcal{F}$
- $v \in F$
- $\varphi = t_v \circ \psi = \psi \circ t_v$

De plus, $F = \ker(\vec{\varphi} - Id_E)$

Proposition 26 : Une isométrie affine φ du plan est soit :

- Une translation si $\vec{\varphi} = Id_E$
- Une réflexion si $\vec{\varphi}$ est une réflexion et φ a un point fixe
- Une symétrie glissée si $\vec{\varphi}$ est une réflexion et φ n'a pas de point fixe
- Une rotation si $\vec{\varphi}$ est une rotation.

(Voir annexe)

2 - En dimension 3

Définition 27 : Si f est une isométrie euclidienne et A sa matrice sous forme réduite

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ f est une réflexion
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ f est une rotation
- Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ f est une anti-rotation.

Proposition 28 : Si φ est une isométrie affine

- Si $\vec{\varphi} = Id$, φ est une translation
- Si $\vec{\varphi}$ est une réflexion φ est une réflexion si elle a un point fixe, une symétrie glissée sinon.
- Si $\vec{\varphi}$ est une rotation, φ est une rotation si elle a un point fixe, vissage (ou déplacement hélicoïdal) sinon
- Si $\vec{\varphi}$ est une antirotation, φ a un unique point fixe et est une anti-rotation.

IV - Isométries de polyhèdre

Définition 29 : Soit T un polyhèdre régulier convexe. Notons $O(T)$ l'ensemble des isométries qui préservent T.

Proposition 30 : Si T est le tétraèdre régulier,

$$O(T) \simeq \mathfrak{S}_4$$

Application 31 : Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ par injection

$$\mathfrak{S}_4 \hookrightarrow O(3) \hookrightarrow GL_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_3(\mathbb{C})$$

Audin + DV2 ?

Proposition 32 : $- O^+(T) = \mathcal{A}_4$

- $O^+(\text{cube}) = O^+(\text{octaèdre}) = \mathfrak{S}_4$
- $O^+(\text{dodécaèdre}) = O^+(\text{icosaèdre}) = \mathcal{A}_5$

Si P est un polygone régulier à n côtés :

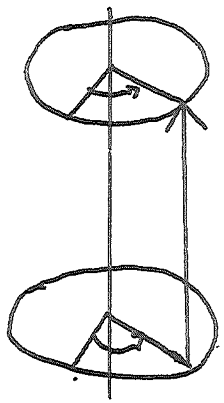
- $O(P) = D_{2n}$
- $O^+(P) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ANNEXE

Isométries affines en dimension 2 :

	Translations	rotations	réflexions	symétries glissées
Ensemble invariant	pas de point invariant	Un unique point fixe	une droite de points fixes	pas de point fixe
Droites invariantes	une direction de droites	pas de droite invariante	Une direction de droite + droite de réflexion	Une unique droite invariante.
Décomposition en réflexions	2 droites parallèles	2 droites sécantes	1 droite	3 droites

Isométries affine en dimension 3 :



Vissage