Antoine Becquet.

Leçon : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie)

Ref : D. Serre, D. Perrin.

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle .,. \rangle$ son produit scalaire, et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ses endomorphismes, $\|.\|$ sa norme

I. Définitions, quelques classes d'endomorphismes

1.1 Adjoint.

(Def 1) Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On dit que u et v sont adjoints si pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x, u(y)) = (v(x), y)$

(Th 2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme adjoint à u noté u^*

(Rq 3) Si on se fixe une b.o.n de E et si M est la matrice de u dans cette base, alors M^T est la matrice de u^*.

(Ex 4) $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) = AM - MA$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du p.s $\langle A,B \rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$.
Alors $\varphi_A^* = \varphi_{A^T}$

(Prop 5) On a les propriétés suivantes :
* $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $u^{**} = u$
* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{L}(E)$ $(\lambda u)^* = \lambda u^*$
* $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

1.2 Endomorphismes orthogonaux

(Def 6) $u \in \mathcal{L}(E)$ est appelé isométrie de E si $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

(Prop 7) On a équivalence entre
(i) u isométrie (ii) $u \circ u^* = Id_E$

(Rq 8) La prop précédente justifie l'appélation d'endomorphismes orthogonaux pour les isométries.

(Def 10) On note $O(E)$ l'ensembles des isométries de E. $O(E)$ étant, à choix de base près, canoniquement isomorphe à $O_n(\mathbb{R})$ $= \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M.M^T = I_n \}$.

(Ex 11) Les symétries orthogonales sont des isométries, les projecteurs non triviaux non.

(Ex 12) $O_2(\mathbb{R}) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in [0, 2\pi[\right\}$.

1.3 Endomorphismes symétriques, antisymétriques

(Def 13) On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, ou autoadjoint, si $u^* = u$. On dit qu'il est antisymétrique si $u^* = -u$. En se fixant une base orthonormée de E et pour M la matrice de u dans cette base cela se traduit respectivement par $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(Ex 14) Les projecteurs orthogonaux sont symétriques

(Def 15) $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit positif (resp défini positif) si $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (resp $\langle u(x), x \rangle > 0$). On note $\begin{cases} S^+(E) \\ S^{++}(E) \end{cases}$ l'ensemble des endomorphismes positifs (resp définis positifs).

1.4 Endomorphismes normaux.

(Def 16) $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

160*

(Prop 17) u normal ssi $\forall x, y \in E$ $(u(x), u(y)) = (u^*(x), u^*(y))$ ssi $\forall x \in E$ $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(Ex 18) Les endomorphismes orthogonaux, symétriques et antisymétriques sont normaux.

(Ex 19) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $X \longmapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est normal mais n'est ni sym, antisym ni orthogonal.

II Réductions

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ici } E = \mathbb{R}^n \text{ muni du p.s canonique,} \\ \text{On identifie } \mathcal{L}(E) \text{ avec } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \end{array} \right.$

2.1 Réduction des endomorphismes normaux

DEV 1

(Th 20) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale, alors il existe O orthogonale telle que OMO^{-1} soit diagonale par bloc, les blocs diagonaux étant 1×1 ou bien 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

(Ex 21) La matrice A de l'exemple 19 est de cette forme.

2.2 Réduction des endo. symétriques

(Th 22) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors M est diagonalisable en base orthonormée.

(App 23) Si q est une forme quadratique, alors il existe une b.o.n $(e_1 \dots e_n)$, $p \leq r \leq n$ tq si $x = \sum x_i e_i$ alors $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2$.
Le couple (p, r) étant unique.

(App 24) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable alors $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $D^2 f(x) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Supposons $Df(x) = 0$ et $D^2 f(x)$ inversible (point critique non dégénéré). Alors :

* Si $D^2 f(x) > 0$ f admet un min local strict en x.
* Si $D^2 f(x) < 0$ f admet un max local strict en x
* Sinon f admet un point col en x.

2.3 Réductions des endomorphismes orthogonaux

(Th 26) Si $u \in O(E)$ alors il existe $p, q, s \leq n$ $\theta_1, \dots, \theta_s \in]0, \pi[$ et une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{où } R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

III Etude du groupe orthogonal

On s'intéresse dans cette partie au sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ composé des matrices orthogonales. $O_n(\mathbb{R})$ ou O_n. On note $SO_n = \{M \in O_n, \det(M) = 1\}$ le groupe spécial orthogonal et $O_n^- = O_n \setminus SO_n$.

3.1 Propriétés topologiques

(Prop 27) O_n est un ouvert de GL_n, possédant exactement deux composantes connexes, ouvertes, à savoir SO_n et O_n^-.

(Cor 28) $O_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[, \varepsilon = \pm 1 \right\}$

16c*

3.2 Symétries orthogonales :

(Def 29) Si $S \in O_n$, $S^2 = I_n$, on dit que S est une symétrie orthogonale

(Prop 30) Soit $S \in O_n$. Il existe $E^+ \perp E^-$ deux sev de $\mathbb{R}^n$ tq $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$ et $S_{|E^+} = id$, $S_{|E^-} = -id$ (où on voit S comme un élément de $O(\mathbb{R}^n)$)

(Def 31) Si $\dim E^- = 1$ S est appelée réflexion orthogonale, si $\dim E^- = 2$ S est appelé renversement orthogonal.

(Prop 32) Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ il existe une unique symétrie orthogonale S tq $F = E^+(S)$ en particulier si $F = vect(x)$ on a $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$S(y) = 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x - y$$

3.3 Générateurs et centre de O_n.

(Th 33) Le centre de O_n est $Z = \{\pm I_n\}$, en particulier si $n \geq 2$, O_n n'est pas commutatif. Celui de SO_n est $Z \cap SO_n$ soit $\{I_n\}$ si n est impair et $\{\pm I_n\}$ si n est pair (pour $n \geq 3$)

(Th 34) O_n est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément, si M est dans O_n, alors M est produit d'au plus n reflexions.

(Th 35) SO_n est engendré par les renversements orthogonaux. Plus précisément si $M \in SO_n$, alors M est produit d'au plus n renversements.

3.4 Le cas de O_2

(Prop 36) • Si $M \in O_2^-$ alors M est une réflexion.
• Si $M \in SO_2$ alors M est produit de deux réflexions, dont l'une peut être choisie arbitrairement.
• Si $R \in SO_2$, $S \in O_2^-$, alors $R^{-1} = SRS$
• SO_2 est commutatif.

(Prop 37) • $SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$

• $O_2^- = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$.

(Prop 38) L'application $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow SO_2$, $\bar\theta \mapsto (\quad)$ est un isomorphisme de groupe topologique

(Def 39) Si $R \in SO_2$, l'antécédent par ce morphisme de R est appelé angle de R. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est appelé groupe des angles.

3.5 Le cas de O_3

Puisque $O_3 = SO_3 \sqcup O_3^-$ et que $O_3^- = M.SO_3$ où M matrice quelconque de O_3^- on s'intéresse à SO_3. On a notamment le théorème suivant :

(Th 40) SO_3 est simple.

DEV2

Exercice $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$uv - vu = u$. $(*)$

Est-ce que possible que $u \in O_n$?

(1) : $u^2 v - uvu = u^2$ $\leftarrow$ $u \times (*)$

(2) : $uvu - vu^2 = u^2$ $\leftarrow$ $(*) \times u$

(1) + (2) : $u^2 v - vu^2 = 2u^2$.

$\mathcal{H}_k$: $u^k v - vu^k = k u^k$ (k)

$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ok.

$u^k \times (*)$: $u^{k+1} v - u^k v u = u^{k+1}$

(k) $\times u$: $u^k u - v u^{k+1} = k u^{k+1}$

$\Big\}$ $u^{k+1} v - v u^{k+1} = (k+1) u^{k+1}$

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $uP'(u) = P(u)v - vP(u)$

($P = \sum a_k X^k$, $\forall k$, $a_k u^k v - v a_k u^k = u k a_k u^{k-1}$

$\Rightarrow$ $\sum \ldots$

$\Rightarrow$ $P(u)v - vP(u) = uP'(u)$)

Soit P le poly minimal de u. $P(u) = 0$.

Donc $uP'(u) = 0$. donc $P \mid XP'$.

Par égalité des deg, $P = \lambda XP'$ pr un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $0 \in Sp(u)$. Donc $u \notin O_n$.

($\Pi \in O_n \Rightarrow {}^t\Pi \Pi = Id \Rightarrow \Pi$ bij $\Rightarrow 0$ pas vp de Π)

Réduction des endomorphismes normaux. (D. Serre, Matrices)

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ tq OMO^{-1} soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant 1×1 ou bien 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

(Lemme 1) Si $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ commutent alors u et v ont un vecteur propre commun.

(Lemme 2) Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Preuve du lemme 1: Soit λ une vap de u et $F = \ker(u - \lambda Id)$. F est alors stable par u et v. Pour u, pas de problème. Pour v on a que $\forall x \in F$, $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$: $v(x) \in F$.
On peut donc considérer $v_{|F}$ qui admet une valeur propre ($\mathbb{C}$ alg. clos) donc un vecteur propre qui est donc un vecteur propre commun à u et v. □

Preuve du lemme 2: Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $X \neq 0$ $\in \mathbb{C}^n$ tq $A.X = \lambda X$ (*)
→ En multipliant (*) par X^* on obtient $X^*AX = \lambda \|X\|^2$.
→ En passant à l'adjoint on a $X^*A^* = \bar\lambda X^*$ et donc puisque $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ $X^*A = \bar\lambda X^*$, d'où en multipliant par X:
$X^*AX = \bar\lambda \|X\|^2$.
On en déduit $(\lambda - \bar\lambda)\|X\|^2 = 0$, avec $X \neq 0$ on a donc bien $\lambda = \bar\lambda$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Preuve du théorème: On procède par récurrence sur n.

* Pour $n=1$, il n'y a rien à démontrer
* Supposons la propriété vraie pour tout $k \leq n$ pour un certain $n \geq 1$ et montrons la prop. au rang $n+1$.

M étant normale, elle commute avec sa transposée, ce qui assure par le lemme 1 qu'il existe X, vecteur propre commun à M et ${}^tM$, éventuellement complexe. Alors:
→ Si X est réel, les valeurs propres associées le sont également.

Remarquons alors que $E = \text{vect}(x)$ et $E^\perp$ sont stables par M (et M^T). En effet c'est clair pour E et si $y \in E^\perp$ alors $\langle My, x\rangle = \langle y, M^T x\rangle = \langle y, \lambda' x\rangle$ pour λ' associé à M^T
$= 0$ et de m̂ pour $M^T y$.

Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp$ on a donc $OMO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$. M' est alors normale en temps que restriction de M à $E^\perp$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à M'.

$\rightarrow$ Si X est complexe, on peut supposer que les vecteurs $R = \text{Re}(X)$ et $I = \text{Im}(X)$ ne sont pas colinéaires car sinon on peut extraire $X' \in \mathbb{R}^n$ associé à la m̂ valeur propre qui est donc réelle. Posons $E = \text{vect}(R, I) \subseteq \mathbb{R}^n$. On a alors E stable par M car en effet $MR = \frac{1}{2} M.(X + \bar{X})$
$= \frac{1}{2}(\lambda X + \bar{\lambda}\bar{X}) = \text{Re}(\lambda X) = \text{Re}\lambda\, R - \text{Im}\lambda\, I$. et de même
$MI = \text{Re}\lambda\, I + \text{Im}\lambda\, R$.

Comme dans le premier point on a encore E stable par M^T et donc E^T stable par M (et M^T).

On a donc O orthogonale telle que $OMO^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$
avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et M' normale.

La normalité de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donne $\begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac + bd = ab + dc \end{cases}$ soit encore
$\begin{cases} b^2 = c^2 \\ (a-d)(c-b) = 0 \end{cases}$ mais $b = c$ impliquerait $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ symétrique et donc d'après le lemme 2, λ réel, ce qui est absurde donc $b = -c$ et $a = d$. D'où.
$OMO^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à M'.

L'hérédité étant assurée on conclut la preuve par principe de récurrence $\square$

Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ (D. Perrin) 60

(Lemme 1) Les renversements sont conjugués dans SO_3.

(Lemme 2) Si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S_2$ tq $\|x_1 - x_2\| = \|y_1 - y_2\|$ alors il existe $u \in SO_3$ tq $u(x_1) = y_1$, $u(x_2) = y_2$.

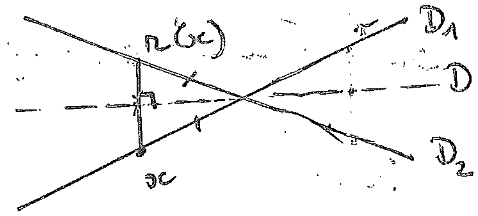
Preuve du lemme 1 : Soient r_1 et r_2 des renversement de droites respectives D_1 et D_2. Si $D_1 = D_2$ il n'y a rien à faire. Sinon pour $D_1 = \text{vect}(d_1)$, $D_2 = \text{vect}(d_2)$ on pose $D = \text{vect}(d_1 + d_2)$ et r le renversement de droite D, bissectrice de D_1 et D_2. Alors on a $r r_1 r = r_2$.

En effet, c'est un renversement car :

* $(r r_1 r)^2 = r r_1^2 r = r^2 = id$.
* $\ker(r r_1 r - id) = \ker(r(r_1 - id)r) = r \ker(r_1 - id) r$

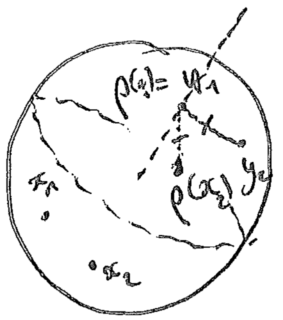
avec $r \in SO_3 \subseteq GL_3$ donc $\underset{\ker}{\dim}(r r_1 r - id) = \dim \ker(r_1 - id) = 1$

De plus si $x \in D_2$ on a $r(x) \in D_1$ (D bissectrice) donc $r_1 r(x) = r(x)$ et $r r_1 r(x) = x$: $r r_1 r_{|D_2} = id$.



On a donc bien $r r_1 r = r_2$: r_1 et r_2 sont conjugués. $\square$

Preuve du lemme 2. Il suffit de considérer tout d'abord une rotation ρ envoyant x_1 sur y_1 (on prend comme axe la normale au plan (Ox_1y_1) et comme angle $(\widehat{x_1 O y_1})$). On a $\rho(x_1) = y_1$ et par isométrie $\|\rho(x_2) - \rho(x_1)\| = \|x_1 - x_2\| = \|y_1 - y_2\| = \|\rho(x_2) - y_1\|$



On peut alors considérer la rotation d'axe (Oy_1) envoyant $\rho(x_2)$ sur y_2 : ρ'.

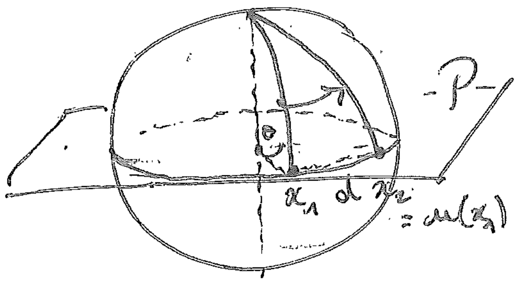
On a donc $\rho' \circ \rho(x_1) = \rho'(y_1) = y_1 = u(x_1)$
$\rho' \circ \rho(x_2) = y_2 =: u(x_2)$ $\square$

10+

<u>Preuve du théorème</u>. Soit N un sous groupe distingué de SO_3. $N \neq \{Id\}$ et soit $u \in N \setminus \{Id\}$. Alors d'après le théorème de structure de SO_3 on a dans une base appropriée :

$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: c'est un renversement ou $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

notons P le plan normal à l'axe de cette rotation. x_1 un point de l'équateur de S_2 contenu dans P, $x_2 = u(x_1)$ et $d = \|x_1 - x_2\|$.



Chaque point du méridien de x_1 est envoyé sur le point du méridien de x_2 à la m̂ longitude.

Ainsi, si x varie sur le méridien de x_1, de x au pôle nord $\|x - u(x)\|$ varie continuement de d à 0. Ainsi, si $m \in]0, d[$ il existe $x \in S_2$ tq $\|x - u(x)\| = m$

En particulier pour n assez grand $2(1 - \cos\frac{\pi}{n}) < d$

il existe donc $x \in S_2$ tq $\widehat{(xOu(x))} = \frac{\pi}{n}$.

Considérons $s \in SO_3$ envoyant x_1 sur x et un point de l'équateur à un angle de $\frac{\pi}{n}$ de x_1 sur $u(x)$. On a alors $v_1 = sus^{-1}$ envoyant x_1 sur x_1' avec $v_1 \in N$.

On peut de m̂ trouver $v_2 \in N$ tq x_1' soit envoyé sur l'équateur à un angle de $\frac{\pi}{n}$ (dans le m̂ sens) et v_i par récurrence tq $v_1 \dots v_{i-1}(x_1)$ soit envoyé sur $S_2 \cap P$ à un angle de $\frac{\pi}{n}$.

Mais alors $v_1 \dots v_n \in N$ et $v_1 \dots v_n(x_1) = -x_1$

Avec $v_1 \dots v_n \in SO_3$ on a donc $v_1 \dots v_n$ un renversement par le lemme 1 on a donc $N = SO_3$ psq les renversements engendrent SO_3. $\square$