158*

NOM : MARTY **Prénom :** Théo **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 158* Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Autre sujet :

Manque le nom des thm ds le plan. Manque d'exples (et d'applications)

On suppose les notions de matrices orthogonales et unitaires et d'adjoint d'endomorphisme connues.

I) Généralités

A) Structure

1. Définition : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$). M est dite symétrique (resp. hermitienne) si ${}^tM = M$ (resp. $M^* = M$). On note S_n (resp H_n) l'ensemble de ces matrices.
On note de plus $A_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^tM = -M\}$.

2. Exemple : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ et ${}^tM + M$ sont symétriques.

3. Proposition : S_n, H_n et A_n sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$, n^2, $\frac{n(n-1)}{2}$.
De plus on a $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$,
$M_n(\mathbb{C}) = H_n \oplus iH_n$ et $H_n = S_n \oplus iA_n$

4. Proposition : Soit $M \in H_n$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $x^*Mx \in \mathbb{R}$.

5. Définition : Soit $M \in H_n$. On dit que M est positive si $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $x^*Mx \geq 0$. On dit que M est définie positive si de plus $(x^*Mx = 0) \Rightarrow (x = 0)$.
On définit $H_n^+ = \{M \in H_n \text{ positive}\}$,
$H_n^{++} = \{M \in H_n \text{ définie positive}\}$,
et $S_n^+ = H_n^+ \cap M_n(\mathbb{R})$, $S_n^{++} = H_n^{++} \cap M_n(\mathbb{R})$

6. Proposition : $S_n^+, S_n^{++}, H_n^+, H_n^{++}$ sont convexes.
S_n^+ et H_n^+ sont fermés respectivement dans S_n et H_n.
$S_n^{++} = S_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$, $H_n^{++} = H_n^+ \cap GL_n(\mathbb{C})$.

B) Lien avec les endomorphismes

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et b une base orthonormée de E.

7. Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit auto-adjoint si elle vérifie $u^* = u$, qui est équivalent à $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle y, u(x) \rangle$.

8. Propriété : $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint si et seulement si $Mat_b(u) \in S_n$.

9. Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et $F \subset E$ stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

10. Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $Mat_b(u) \in S_n^{++}$, alors $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est un produit scalaire sur E.

C) Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et b une base de E. Soit q une forme quadratique ou hermitienne, et ϕ l'application bilinéaire associée. On note $b = (e_1 - e_n)$.

11 Proposition : $Mat_b(q) := (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in H_n$

12. Proposition : Soit b' une base de E et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice de passage de b à b'. Alors
$Mat_{b'}(q) = P^* Mat_b(q) P$

13 Proposition : Soit $x, y \in E$ et X, Y leurs coordonnés dans b. Alors $\Phi(x, y) = X^* Mat_b(q) Y$

14. Proposition : Si q est positive, $\forall (x, y) \in E$, on a :
- $|\Phi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y)$ (Schwarz)
- $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$ (Minkowsky)

dem ? Schwarz : étude d'un trinôme Mink. :

II) Réduction

A) Diagonalisabilité

15 Proposition : Les matrices symétriques et hermitiennes sont à valeurs propres réelles. De plus leurs sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire (hermitien) canonique.

Pour les méthodes num. les mat sym réel cool
Hadot, les matrices de corrélation sont sym
Hessi
Moments d'inertie

On peut retrouver : - les inégalités d'entrelacement

Cas particulier des matrices normales. (à dire à la défense de plan ?)

cor: $M \in H_n^{++}$, $N \in H_n$, MN est diag et ses vp ont le signe de celles de N.

16. Théorème : Soit $M \in S_n$ (respectivement $M \in H_n$). Alors il existe $P \in O_n$ et D diagonale (resp. $P \in U_n$) tel que $M = P^{-1}DP = {}^tPDP$.

17. Proposition : Soit $M \in S_n$, alors on a :
$$S \in S_n^+ \iff Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$$

18. Proposition : Soit $M \in S_n^{++}$ et $N \in S_n$ (resp. $M \in H_n^{++}$ et $N \in H_n$). Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) et D diagonale tel que $M = {}^tPP$ et $N = {}^tPDP$ (resp. $M = P^*P$ et $N = P^*DP$).

19. Lemme : Soit $M, N \in H_n^{++}$ tel que $M \neq N$, et $\alpha, \beta \in]0,1[$ tel que $\alpha + \beta = 1$. Alors
$$\det(\alpha M + \beta N) > (\det M)^\alpha (\det N)^\beta$$
ie. log ∘ det concave sur les matrices H_n^+

B) Quotient de Rayleigh

(en fait $\sqrt[n]{\ }$ ∘ det concave sur H_n^+, optimal)

20. Définition : Soit $M \in H_n$. Ses valeurs propres sont réelles et on les notes $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$.

21. Proposition : On a
$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^* M x}{x^* x} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^* M x}{x^* x}$$
concave sur S_n

cvxe sur S_n

$\frac{x^* M x}{x^* x}$ est appelé quotient de Rayleigh

22. Proposition : Soit $M \in H_n$ (ou S_n). Alors
$$\|M\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{|x^* M x|}{x^* x} = \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|) = \rho(M)$$
mettre en exercice que le rayon spectral est une norme.

23. Proposition :
$$\lambda_k(M) = \min_{\dim F = k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* M x}{x^* x} = \max_{\dim F = n-k+1} \min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* M x}{x^* x}$$
où les min et max sont pris sur des sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ selon le cas.

24. Proposition : Soit $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ et $A, B \in H_n$.
Si $i + j = k + 1$ alors $\lambda_k(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$
Si $i + j = k + n$ alors $\lambda_k(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$

25. Proposition : Les λ_k sont 1-Lipschitziennes.

III) Application des matrices symétriques et hermitiennes

A) Calcul des $\sqrt{\ }$ et exp.

26. Proposition : Soit $M \in H_n^{++}$ (resp S_n^{++}). Alors M admet une unique racine carré dans H_n^{++} (resp S_n^{++}) que l'on note $\sqrt{M}$.

27. Proposition : Pour tout $H, K \in H_n^{++}$ (ou S_n^{++}), on a
$$\|\sqrt{H} - \sqrt{K}\|_2 \leq \sqrt{\|H - K\|_2}$$

28. Théorème : (décomposition polaire)
Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$). Alors il existe un unique couple $(Q, H) \in U_n \times H_n^{++}$ tel que $M = QH$ (resp. $(Q,H) \in O_n \times S_n^{++}$). De plus $M \mapsto (Q, H)$ est un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $U_n \times H_n^{++}$ (resp de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $O_n \times S_n^{++}$).

29. Remarque : $\sqrt{A}$ et $\exp(A)$ se calculent en connaissant un polynôme qui interpole $\sqrt{\ }$ et exp sur $Sp(A)$.

30. Théorème : exp induit un homéomorphisme
$$\exp : S_n \longrightarrow S_n^{++}$$

DEV1 $\sqrt{\ }$ sur S_n^+ ? Pour 27 → montre qu'on peut prolonger de façon

FAUX ! M doit être semi-positive

B) Retour sur les formes quadratiques et hermitiennes.

31. Théorème : Soit $M \in H_n$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $r \in [\![0,n]\!]$ tel que $M = P^*\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$. r est unique.

Si on réduit les formes quadr. $\mathbb{C}$: ${}^tP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$, hermitiennes : $P^*\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \\ & & 0 \end{pmatrix}P$

32. Théorème : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $p, q \in [\![0,n]\!]$ tel que $p+q \leq n$ et
$$M = {}^tP\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}P.$$
(p,q) est unique et est appelé signature de M. ← peut être trouvée par un algorithme de Gauss.

(Sylvester)

33. Remarque : Ces deux théorèmes permettent de classifier les formes quadratiques et hermitiennes. Il permet de plus de classifier les coniques non dégénérées.

34. Exemple : Soit Γ une conique d'équation ${}^tx M x = 1$ où $M \in S_2 \cap GL_2(\mathbb{R})$. Si la signature est :

- $(2,0)$, Γ est une ellipse.
- $(1,1)$, Γ est une ~~parabole~~. hyperbole
- $(0,2)$, Γ est vide.

DEV2

35. Théorème : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Alors il existe une unique ellipsoïde centrée en 0, de volume minimal et contenant K.

C) Application en analyse

36. Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ pour $x \in U$. Alors pour tout $x \in U$, $H(x)$ est symétrique.

37. Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tel que $0 \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose $df_0 = 0$, et que $H(0) \in GL_n(\mathbb{R})$, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un difféomorphisme $\varphi : \tilde{U} \to \tilde{V}$, où $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont des voisinages de 0, et tel que
$$\forall x \in \tilde{U}, \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{j=p+1}^{n} \varphi_j(x)^2.$$

(Rouvière)

On peut parler de recherche d'extremums.

Références :

Serre : Matrices

Gourdon : Algèbre

Debeaumarché : Manuel de Mathématiques, Vol.4

Dev 2 : ellipsoïde de John

Existence

• Soit $S \in S_n^{++}$. On pose $\mathcal{E}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n, {}^t x S x \leq 1\}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ ${}^t x S x \leq 1 \Leftrightarrow {}^t(\sqrt{S}x)\sqrt{S}x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{S}x \in B^n \Leftrightarrow x \in \sqrt{S}^{-1} B^n$

Donc $\mathcal{E}(S) = \sqrt{S}^{-1} B^n$ $\quad Vol(\mathcal{E}(S)) = \frac{1}{\sqrt{\det S}} \, Vol\, B^n$

Soit $\mathcal{A} = \{S \in S_n^{++}, K \subset \mathcal{E}(S)\}$

$\forall x \in K, {}^t x S x \leq 1$. On pose $q_S(x) = {}^t x S x$

+ Mq $\mathcal{A}$ est borné. Soit $S \in \mathcal{A}$. $a \in \mathring{K}$ et $r > 0$, $B(a,r) \subset K$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\| \leq r$,

$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{\underset{\in K}{q(x+a)}} + \sqrt{\underset{\in K}{q(a)}} \leq 2$. Donc $q(x) \leq 4$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq 1$. $q(x) \leq \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$. Donc $\|S\|_2 \leq \frac{4}{r^2}$

Soit (S_k) une suite de $\mathcal{A}$ tq $\det S_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \sup_{M \in \mathcal{A}} \det M$

S_k bornée dans S_n. Donc quitte à extraire (S_k) cv vers S dans S_n. S_n^+ fermé ds S_n donc $S \in S_n^+$

Par continuité du det, $\det S = \sup_{M \in \mathcal{A}} \det M > 0$. Donc $S \in S_n^{++}$

$\forall x \in K$, $M \mapsto {}^t x M x$ est C^0 donc $\forall x \in K$, ${}^t x S x \leq 1$ donc $S \in \mathcal{A}$. D'où l'Ex.

Unicité

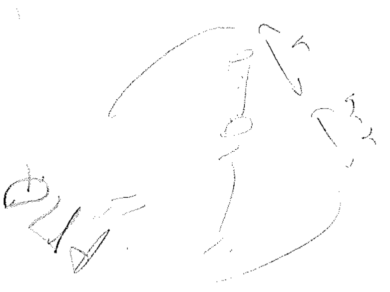
• Soit $S' \in \mathcal{A}$, $\det S' = \det S$. On suppose $S' \neq S$.

$\det\left(\frac{1}{2}(S+S')\right) > \sqrt{\det S}\sqrt{\det S'} = \det S$. Contradiction ! D'où l'unicité

$\in \mathcal{A}$ par cvxité de $\mathcal{A}$ (pt 1°) (S_n^{++} cvxe et l'inégalité se comporte bien vis à vis de la cvxité)

$$|q(x) - q_n(x)| = |(q-q_n)(x)| = \left|(q-q_n)\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \times \|x\|^2 \leq N(q-q_n)\|x\|^2$$

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$



$\sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

$\sup_{x,y \neq 0} \frac{\|\phi(x,y)\|}{\|x\|.\|y\|}$

$\|u(x)\| \leq C_1 \|x\|$

$O \in O_n(\mathbb{R})$

$OA \longrightarrow$ conserve le noyau