

NOM : CHABAUD

Prénom : Ulysse

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 157 - Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents.

Autre sujet :

K corps, E K -ev de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$,
 $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $A \in M_n(K)$.

I. Généralités.

Déf 1: $\lambda \in K$ valeur propre de u si $\exists x \in E / x \neq 0, ux = \lambda x$

x est un vecteur propre de u
 et $E_\lambda = \{x \in E / ux = \lambda x\}$ est l'espace propre de u associé à λ .

Déf 2: $\chi_u(X) = \det(A - XI_n)$ est le polynôme caractéristique de A .
 χ est indépendant de la base B , $\chi_{u^{-1} \circ u} = \chi_u$, $\chi_u = \chi_{\text{Mat}_B(u)}$.

Prop 3: $\chi_u = \chi_A$
 Rem 4: $\chi_u(X) = (-1)^n (X^n - \chi_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \chi_n)$ avec $\chi_1 = \text{tr}(A)$
 $\chi_n = \det(A)$

Déf 5: $\pi_u \in K[X]$ unitaire $\pi(\pi_u) = \{P \in K[X] / P(u) = 0\}$ est le polynôme minimal de u .

Prop 6: $u \mapsto \text{Mat}_B(u)$ donc $\pi_A = \pi_u$ avec $A = \text{Mat}_B(u)$

Prop 7: (λ) valeur propre de $u \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$

Prop 8: F sc-er stnf de E stable par u , alors $\chi_F \in \mathcal{L}(F)$
 et $\chi_{u|_F} = \chi_u$
 $\pi_{u|_F} | \pi_u$

Théorème 5 (Cayley-Hamilton): $\chi_u(u) = 0$

Rem 10: $\pi_u | \chi_u$ et $\deg \pi_u \leq n$

Rem 11 (des Noëaux): $P = P_1 \dots P_s \in K[X]$, P_i premiers entre eux $\forall i \geq 1$.

Alors $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^s \ker P_i(u)$

Prop 12: On va chercher à décomposer π_u en χ_u pour avoir $E = \bigoplus_{i=1}^s \ker P_i(u)$

II. Endomorphismes trigonalisables.

1) Définition, caractérisations.

Déf 13: u trigonalisable si $\exists$ une base B de E tq $\text{Mat}_B(u)$ est triangulaire.

u trigonalisable ssi $\exists$ une base B de E tq A est triangulaire.

$\Leftrightarrow$ à une valeur propre de u , α sa multiplicité.

$E_\alpha = \ker(u - \alpha \text{Id})^\alpha$ est appelé sous-espace caractéristique de u associé à α .

Théorème 14 (Caractérisations): Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) u trigonalisable
- (ii) u scindé sur K
- (iii) π_u scindé sur K

Corollaire 15: Si K est algébriquement clos, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Contre-ex 16: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = \pi_A = X^2$, trige sur $\mathbb{R}$, pas trige sur $\mathbb{C}$.

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_B = \pi_B = X^2 + 1$, pas trige sur $\mathbb{R}$, trige sur $\mathbb{C}$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_C = \pi_C = (X^2 + 1)^2$, pas trige sur $\mathbb{R}$, pas trige sur $\mathbb{C}$.

Prop 17: Si A trigonalisable, $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $S_P(A) = \{\lambda_i / i \in [1, n]\}$, comptés avec multiplicité.

App 18: u trigonalisable, $S_P(u) = \{\lambda_i\}$, $P \in K[X]$, alors $S_P(P(u)) = \{P(\lambda_i)\}$ et $S_P(\exp(u)) = \{e^{\lambda_i}\}$

2) Trigonalisation simultanée

Prop 19: u trigonalisable et F sc-er stable par u alors χ_F trigonalisable

Prop 20: $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)$ tq u_i trigonalisables et commutant $\forall i \geq 1$

Alors les u_i sont co-trigonalisables (i.e. $\exists$ une base commune de trige).

Contre-ex 21: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ co-trigonalisables mais pas commutables.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ semblables mais pas co-trigonalisables.

Prop 22: Si u et v sont co-trigonalisables, alors $u+v$ et uv sont trigonalisables.

Contre-ex 23: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A+B$ pas trigonalisable

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, AB pas trigonalisable

3) Propriétés topologiques

It = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{T}_n(K)$ l'ensemble des matrices trigonalisables

Prop 24: $\{M \in M_n(K) / M \text{ diagonalisable à valeurs propres dans } \text{tr}(u)\}$ est dense dans $\mathcal{T}_n(K)$

Prop 25: $\mathcal{T}_n(K)$ est un fermé de $M_n(K)$.

NOM : CHABAUD

Prénom : Ulysse

Rouge entourez l'épreuve Bleu

entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : 157 - Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents.

Autre sujet :

DV1 Ben

III. Endomorphismes nilpotents

1) Définition et caractérisations

Def 26: $N = \{u \in L(E) \mid \exists p \in \mathbb{N}, u^p = 0\}$ est l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E .

Def 27: $r = \min \{m \in \mathbb{N} \mid u^m = 0\}$ pour $u \in N$ est l'indice de nilpotence de u .

Ex 28: A nilpotente, alors $n_1 \mapsto An_1$ est nilpotent.

$\varphi: P \rightarrow P'$ et $\psi: P \rightarrow P(X) - P(X)$ sont nilpotents dans $K_n[X]$ mais pas dans $K[X]$ bien que $\forall i \in \mathbb{N}, \varphi^i = \psi^i = 0$.

Théorème 29 (caractérisations): les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) u nilpotent
- (ii) $\chi_u(X) = (-1)^n X^n$
- (iii) $\exists p \in \mathbb{N} \mid \pi_p(X) = X^p$ et p est alors l'indice de nilpotence de u
- (iv) u trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$

Rmq 30: En particulier, u nilpotent $\Rightarrow u$ trigonalisable

Contre-ex 31: $-I_n$ trigonalisable et pas nilpotent

Prop 32: $\bullet$ Si $\text{car}(K) = 0$, u nilpotent $\Leftrightarrow \forall K \in N, \text{tr}(u^k) = 0$

Contre-ex 33: Si $\text{car}(K) = p$, $\text{tr}(F_p^k) = 0, \forall k$.

Application 34 (Théorème de Borel): max ordre des E_n (pour x)

Tout sous-groupe d'exposant fini est fini.

2) Structure de N

Rmq 35: U est un cône: $\forall u \in N, \forall \lambda \in K, \lambda u \in N$

Ex 36: En dimension 2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N \Leftrightarrow \begin{cases} \det M = 0 \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=0 \\ a^2+bc=0 \end{cases}$

Prop 37: Si $u \in N$ et $v \in L(E)$, avec $uv = vu$.

Alors: $\bullet uv = vu$ est nilpotent

$\bullet \tilde{u} \in N, u+v \in N$

Contre-ex 38: N n'est pas un espace vectoriel: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin N$

Prop 39: $\text{Vect}(N) = \ker(\text{tr})$

3) Applications à la réduction

Prop 40 (Trigonalisation d'une matrice nilpotente): Soit $u \in N$, r l'indice de nilpotence de u , alors

$$J_{2r} / \text{Mat}_2(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Def 41: $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ est appelée bloc de Jordan de taille k

Lemme 42: les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) $r = n$, i.e. $\chi_u = (-1)^n X^n$ et $\text{tr} u = X^n$
- (ii) $\exists x_1, x_2, \dots, x_n$ une base de E
- (iii) $J_{2r} / \text{Mat}_2(u) = J$

Théorème 43 (décomposition de Jordan pour les nilpotents): $u \in N, \exists k \in \mathbb{N}, \exists r_1, \dots, r_k$

$$J_{2r} / \text{Mat}_2(u) = \text{Diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_k}) = \tilde{J} \text{ et } \max\{r_i\} \leq r$$

Théorème 44 (décomposition de Jordan): u trigonalisable, $\chi_u(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{a_1} \dots (X-\lambda_s)^{a_s}$

$$J_{2r} / \text{Mat}_2(u) = \text{Diag}(\tilde{J}_1(\lambda_1), \dots, \tilde{J}_s(\lambda_s))$$

où $\tilde{J}_i(\lambda_i) = \lambda_i I_{a_i} + J_{r_i}$ où $\tilde{J}_{r_i}$ est la matrice de Jordan de taille r_i qui est nilpotent.

Théorème 45 (décomposition de Dunford): u trigonalisable,

$$\exists (d, n) \in \mathbb{N}^2$$

o d diagonalisable

o n nilpotent

o $u = d + n$

o $d \cap n = 0$

De plus d et n sont des polynômes en u

Contre-ex 46: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable (et pas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Application 47: calcul de l'exponentielle de u .

GOURDON, Algèbre

TAUVEL, Algèbre + expl.

FON, Algèbre 2

OA (toute une série nilpotent)

Uneimé

Contenu de la leçon

(2)

- des appli des décomp de Jordan et Dunford seront bienvenues
- + de topo possible. (ex. $\overline{D_n}(\mathbb{C}) = D_n(\mathbb{C})$ permet de redém Cayley-H).
- exp. on peut dire beaucoup de choses dans le cas des mat nilpotentes
- globalement : à enrichir avec des applications.
- les C-ex sont bien.
- On peut parler de combinatoire de $\mathbb{C}$ corps finis (cf. rapport Jury).
- appli bête : équ. diff linéaire. (+ système linéaire)
- On peut avoir Dunford sans avoir à calculer $\mathbb{C}$ vp. (cf. Newton-Papillon)
- Hm/4 : l'interpréter en tant que somme de 11 exposés

Dvt 1: Thm de Burnside

Ref: Francinus, Alg 2

(1)

Dans $\mathbb{C}$, $v \in \mathcal{M}_n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}(v^k) = 0$.

- Si G est fini il est d'exposant fini (thm de Lagrange).
- Soit G un u.gpe de $\text{Gln}(\mathbb{C})$ d'exposant fini e . $\forall g \in G, g^e = \text{id}$.
Soit A l'alg. engendrée par G . A est de dim finie (car u alg de $\text{Mn}(\mathbb{C})$).
 $\exists s \in \mathbb{N}^*, \exists (g_1, \dots, g_s)$ base de A .

On pose $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}^s$
 $a \mapsto (\text{tr}(ag_i))_{1 \leq i \leq s}$

Soit $(a, b) \in G^2$ tq $\varphi(a) = \varphi(b)$. $\forall c \in A, \text{tr}(ac) = \text{tr}(bc)$
(en effet...) à écrire (ou ne pas détailler)

$$\begin{aligned} \text{En particulier, pour } c = (ab^{-1})^{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*, \\ \left. \begin{aligned} \text{tr}(ac) &= \text{tr}(ab(ab^{-1})^{k-1}) = \text{tr}((ab)^k) \\ \text{tr}(bc) &= \text{tr}(bb(ab^{-1})^{k-1}) = \text{tr}((ab)^{k-1}) \end{aligned} \right\} \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Rec $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{tr}((ab^{-1})^k) = \text{tr}((ab)^k) = \text{tr}(\text{Id})$

$$\text{tr}((ab^{-1} - \text{Id})^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \text{tr}((ab^{-1})^i) = n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \stackrel{\text{binôme}}{=} n \times 0 = 0$$

Donc $ab^{-1} - \text{Id}$ est nilpotente. $(ab^{-1})^e = \text{id}$ dc $X^e - 1$ annule ab^{-1} donc ab^{-1} diagonalisable donc $ab^{-1} - \text{Id}$ aussi. Finalement ab^{-1} est diag. et nilp. donc elle est nulle. Donc $a = b$. φ est injective.

G est d'exp. fini donc $\forall g \in G, g^e = \text{id}$. Les e up des éléments de G sont des $\sqrt[e]{e}$ -èmes de l'unité donc en nombre fini. Il y a un nbre fini de possibilités pour $\text{tr}(g), g \in G$ donc $\varphi(G)$ est fini. Donc G est fini.

Qqs. - dès qu'on utilise le binôme de Newton, dire bien que ça commute.

Leçon 157 : [endomorphisme, endomorphisme nilpotent]

Questions et exercices

(1) Décomp. de Donyfont. Que peut-on dire de la colonne matrice réelle ppue ?

Plus précisément, mg si $v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists d, n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq d diagonalisable dans $\mathbb{C}$, n nilpotente, $v = d + n$, $dn = nd$.

On fait la décomp de Donyfont si $\mathbb{C}$, on obtient $v = d + n$.

Le but est de mg d et n sont réelles

On utilise la conjugaison: $v = d + n$
 $v = \bar{v} = \bar{d} + \bar{n}$ } unicité $\rightarrow d = \bar{d}$ et $n = \bar{n}$

(2) E de dim n . $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{V}^n$ qui commutent 2 à 2
 $\bigwedge v_i, v_j \Rightarrow v_i v_j = 0$

- utiliser le décomp de Jordan

(ou) utiliser que si f endomorphisme et u nilpotent alors $\text{rg}(f(u)) \leq \text{rg}(f)$
 (qui commutent) (sauf si $\text{rg}(f) = 0$)

$$\ker f \subseteq \ker uf = \ker fu$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow uf(x) = 0$$

Alors cette inclusion est stricte

// noyaux emboîtés

idée : mg $\ker f = \ker fu \Rightarrow \ker f = \ker f u^i$ pour $i \in \mathbb{N}$

$$\ker f = \ker f u^i \quad \text{soit } x \in \ker f u^{i+1} \quad f u^{i+1}(x) = 0$$

$$f u^i(u(x)) = 0 \quad u(x) \in \ker f u^i = \ker f \quad f(u(x)) = 0$$

$$x \in \ker f u = \ker f \quad \text{réciproquement ok donc par réc on}$$

on utilise $\ker f = \ker f u^r$ pour r indice de nilp de E

alors $\text{rg } f = 0$ (ham dur)

noyaux imbriqués

3) Triagonaliser $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

• Calcul du poly caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 2-X & 2 & -3 \\ 5 & 1-X & -5 \\ -3 & 4 & -X \end{vmatrix} = (2-X)(-X(1-X)+20) - 2(-X-15) - 3(20+3(1-X))$$

$$\begin{aligned} &= (2-X)(X^2-X+20) + 10X + 30 - 60 - 9 + 9X \\ &= 2X^2 - 2X + 40 - X^3 + X^2 - 20X + 10X + 30 - 60 - 9 + 9X \\ &= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -(X-1)^3 \end{aligned}$$

Donc : on peut remarquer que si chaque ligne la Σ des colonnes est 1 et factoriser :

$$\begin{vmatrix} 1-X & 2 & -3 \\ 1-X & 1-X & -5 \\ 1-X & 4 & -X \end{vmatrix}$$

• $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est ds le noyau (vient de Σ des colonnes est)

et $\text{rg}(A - I_3) \geq 2$ ($\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ inv) et donc de $\text{rg} = 2$

Ainsi $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

• $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1+10+9 & 2-12 & -3-10+3 \\ 5+15 & 20-20 & -15+5 \\ -3+20+3 & -6-4 & 9-20+1 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(A - I_3)^2 = 1$. $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{Ker}(A - I_3)^2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3)^2$ $\text{Ker}(A - I_3)^2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^2 = (A - I_3)(A - I_3).$$

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3) \subset \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit un 3ème vect. complétant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en base. Or celle

base: $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & a \\ & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$I_{\text{par}} = \Pi \text{ et } \Sigma$$