**NOM :** MEYER **Prénom :** Nicolas **Jury :**

**Algèbre** ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

+ AnGr et Groupe clas. (oGJ). ← 2 devts.

**Sujet choisi :** Exponentielle de matrices. Applications

**Autre sujet :** Réf : Farraut, Analyse & les groupes de Lie
Mneimé-Testard, Intro à la théorie des groupes class.
Lafontaine, Intro aux variétés diff

Dans toute la leçon, $K$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(K)$ d'une norme d'algèbre.

# I. Définitions et premières propriétés

## 1. Définition

<u>Déf 1 :</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ; on appelle exponentielle de $A$, notée $\exp(A)$, la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$.

<u>Rque 2 :</u> La convergence normale de la série dans $\mathcal{M}_n(K)$, complet, assure l'existence de $\exp(A)$.

<u>Exemples 3 :</u> 1. $\exp(O_n) = I_n$

2. $\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

3. si $N$ est nilpotente d'indice $k$, $\exp(N) = \sum_{i=0}^{k} \frac{N^i}{i!}$

4. Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

## 2. Règles de calcul

<u>Prop 4 :</u> Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $P \in GL_n(K)$ ;

1. $[A,B] = 0 \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
2. $\exp(A^*) = (\exp A)^*$
3. $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$
4. $\exp(A) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k$

<u>Rque 5 :</u> Pour 1. $[A,B] = 0$ est nécessaire, comme le montre l'exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Prop 6 :</u> 1. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors $\exp(A) \in GL_n(K)$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

2. $\exp(A)$ est un polynôme en $A$.

## 3. Lien avec la réduction

<u>Prop 7 :</u> $Sp(\exp(A)) = \exp(Sp(A))$ avec égalité des dimensions des espaces propres

<u>Cor 8 :</u> 1. $\det(\exp A) = \exp(Tr(A))$

2. Si $N$ est nilpotente, alors $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

<u>Déf 9 :</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite unipotente si $A - I_n$ est nilpotente.

<u>Rque 10 :</u> On a donc : Nilp $\xrightarrow{\exp}$ Unip

<u>Prop 11 :</u> Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ pour valeurs propres distinctes et si $P \in K[X]$ vérifie $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, alors $\exp(A) = P(A)$.

<u>Prop 12 :</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que $\chi_A$ est scindé sur $K$. Alors ($A$ diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\exp(A)$ diagonalisable)

<u>Appl. 13 :</u> $K = \mathbb{C}$ ; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\exp A = I_n \Longleftrightarrow \begin{cases} Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z} \\ A \text{ diagonalisable} \end{cases}$$

## 4. Méthode de calcul

<u>Prop 14 :</u> Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ admet une décomposition de Dunford $(D,N)$, alors

- $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ (Dunford multiplicative)
- $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ (Dunford additive)

**Exemple 15 :** Calcul d'un bloc de Jordan de taille $k$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}\right) = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{1}{2!} \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Conséquence 16 :** Si $\chi_A$ est scindé sur $K$ (par exemple pour $K = \mathbb{C}$), on peut calculer $\exp(A)$ à l'aide d'une décomposition de Jordan :

**Exemple 17 :** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Sp(A) = \{1, 2, 4\}$ et $A$ est non diagonalisable

La décomposition de Jordan de $A$ donne $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^4 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

## II. Etude de l'application exponentielle

Pour l'instant, on sait que $\exp : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow GL_n(K)$.

### 1. Injectivité - Surjectivité

**Prop 18 :** exp n'est pas injective :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

**Théorème 19 :**
- $K = \mathbb{C}$ : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$
- $K = \mathbb{R}$ : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

**Exemple 20 :** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

**Applications 21 :** 1. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

2. Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $B \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^p$

### 2. Régularité

**Théorème 22 :** $\exp : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow GL_n(K)$ est une application de classe $C^\infty$.

**Rque 23 :** $d\exp(O_n) = Id_{\mathcal{M}_n(K)}$

**Prop 24 :** exp réalise un $C^\infty$-difféomorphisme entre un voisinage ouvert $V$ de $O_n$ dans $\mathcal{M}_n(K)$ et un voisinage ouvert de $I_n$ dans $GL_n(K)$.

**Théorème 25 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ; la différentielle de l'exponentielle en $A$ est donnée par

$$d\exp(A) \cdot X = \exp(A) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} (\text{ad } A)^k X,$$

pour $X \in \mathcal{M}_n(K)$, avec $\text{ad}(A) = (X \longmapsto AX - XA)$.

DVPT 1

### 3. Logarithme

**Rappel 26 :** $B(I_n, 1) \subset GL_n(K)$

**Déf 27 :** Si $A \in B(I_n, 1)$, on définit la fonction logarithme par $\log(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(A - I_n)^k}{k}$

**Théorème 28 :** L'application $\log : B(I_n, 1) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est de classe $C^\infty$ et si $A \in B(I_n, 1)$, $\exp(\log(A)) = A$.

**Théorème 29 :** $\exp : \mathcal{N}ilp \longrightarrow \mathcal{U}nip$ est un homéomorphisme d'inverse le log.

**Application 30 :** $\forall M \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(P(M)) = M$.

**Rque 31 :** On retrouve : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ surjective.

Farraut

DVPT 2 Faraut + H2G2

## III. Application à l'étude des sous-groupes de $GL_n(K)$

**Théorème 32 :** $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp : H_n \longrightarrow H_n^{++}$ sont des homéomorphismes. ← bij $C^0$ d'inv $C^0$

**Application 33 :** • La décomposition polaire $GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme,
i.e. $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

• $GL_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U_n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

**Théorème 34 :** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes continu. Il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \exp(tA)$.

**Exemple 35 :** $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Lemme 36 :** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, alors
$$\left[\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right]^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A+B)$$

**Déf-Prop 37 :** Soit $G$ un sous-groupe fermé de $GL_n(K)$. On appelle algèbre de Lie de $G$ le sous-espace-vectoriel
$$\mathfrak{g} := \{ M \in \mathcal{M}_n(K) \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G \}$$

**Théorème 38 :** Soit $G$ un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ ; il existe un voisinage $U$ de $O_n$ dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage $V$ de $I_n$ dans $G$ tel que $\exp : U \longrightarrow V$ soit un homéomorphisme.

**Corollaire 39 :** Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\dim(\mathfrak{g})$.

**Exemple 40 :** Voir annexe

## IV. Application aux équations différentielles linéaires

**Déf 41 :** On appelle équation différentielle linéaire d'ordre $p$ une équation différentielle de la forme
$$y^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(t)\, y^{(k)}(t) + B(t) \quad \text{avec}$$
. $y : \mathbb{R} \longrightarrow K^n$ la solution cherchée
. $A_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ et $B : \mathbb{R} \to K^n$ des fonctions données

**Rque 42 :** On peut toujours se ramener à $p = 1$.

**Prop 43 :** Si $\varphi(t) = \exp(A(t))$, alors $\varphi'(t) = A'(t)\exp(A(t))$ pour $t \mapsto A(t)$ dérivable.

**Théorème 44 :** Si $A : t \mapsto A(t)$ est continue et $B : t \mapsto B(t)$ est continue, alors la solution de $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ est donnée par
$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right) y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{\tau}^{t} A(s)\,ds\right) B(\tau)\,d\tau$$

**~~Exemple~~ 45 :** La solution de $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $t \longmapsto \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

**Application 45 :** Avec les notations du théorème 44, si $A(t) = A$ est constante, alors on a l'équivalence
$$y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{ssi} \quad Sp(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$$

## Annexe

Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

| Groupe | Submersion $\varphi(M)$ | $d\varphi(M)\cdot H$ | Plan tangent en $I_n$ |
|---|---|---|---|
| $GL_n(\mathbb{C})$ | $0$ | $0$ | $\mathcal{M}_n(K)$ |
| $SL_n(\mathbb{C})$ | $\det M - 1$ | $\mathrm{Tr}(({}^t\mathrm{Com}\,M)H)$ | $I_n + \mathfrak{sl}_n(K)$ |
| $O_n(\mathbb{R})$ | ${}^tMM - I_n$ | ${}^tMH + {}^tHM$ | $I_n + A_n(\mathbb{R})$ |
| $U_n(\mathbb{C})$ | $M^*M - I_n$ | $M^*H + H^*M$ | $I_n + iH_n$ |

avec $\mathfrak{sl}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, \mathrm{Tr}\, M = 0\}$

$A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, {}^tA = -A\}$ (matrices antisymétriques)

Dvt 2 ← (appli de cvge ⟺ a une unique valeur d'adhérence)

Thm. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorφ.

Dém. ① Bien déf . ${}^t\exp(M) = \exp({}^tM) = \exp(M) \to \in S_n(\mathbb{R})$

. $Sp(\exp(M)) = \exp(Sp(M)) \in \mathbb{R}_+^* \to \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

(1bis) $C^0$ : thm $C^0$ sous $\Sigma$.

② Surj. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

av $\lambda_i > 0$ $\forall i$. Alors $P^{-1} \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} P$ ant.

③ Inj. $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \exp(B)$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ $\forall \lambda_i \in Sp(A)$

$B$ commute av $\exp B$ dc av $Q(\exp B) = Q(\exp A) = A$.

(Rappel : 2 mat diag commutent ssi co-diag).

Dc $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\begin{cases} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \end{cases}$

$e^{\lambda_i} = e^{\mu_i} \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \Rightarrow A = B$

↑ $\exp_{\mathbb{R}}$ est inj.

④ Inverse continue : → séquentiellement.

$A_k \in S_n(\mathbb{R})$. $B_k = \exp(A_k)$

Supp. que $B_k \to B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Mq $A_k \to A$ av $B = \exp A$.

Norme associée au pdt scalaire trace ($\langle A|B \rangle = Tr({}^tAB)$)

$(B_k)$ cvge dc bornée.

Comme $\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ X \mapsto X^{-1} \end{cases}$ $C^0$, $(B_k^{-1})$ aussi bornée

Sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|X\|_2 = \max_{\lambda \in Sp(X)} \lambda$

FGN Alg II

$\exists c, c' > 0$ tq $\forall k$ $0 < c \leq \lambda_k \leq c'$, $\lambda_k$ vp de $B_k$

$\Rightarrow$ les vp de $A_k$ sont ds $[\ln(c), \ln(c')] \to (A_k)$ bornée.

Mq $(A_k)$ admet une une unique valeur d'adh $A_{\varphi(k)} \to M$

unicité ⟶ $C^0$ exp $\Rightarrow B_{\varphi(k)} \to \exp(M) = \exp(A)$ + inj de exp : $M = A$

1re ⟶ bornée → existence (Weierstrass).

Questions / Exos ①.

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi P &= PD \\ \Pi &= PDP^{-1} \end{aligned}}$$

moyen mémo pr savoir où est le $^{-1}$

- Calculer l'exp. d'une matrice donnée
- Qd est-ce que $\exp(X)' = X' \exp X$.

voir p.⑤

exp de $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A}$ ?

vp de $A$ = 1 & 2. $1 \neq 2$ dc diag

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$ $\quad y = x$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x + y = x \\ 2y = y \end{matrix}$ $\quad y = 0$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on utilise $A^{-1} = \dfrac{1}{\det} {}^t\mathrm{Com}(A)$.

$$\exp A = P \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

---

Méthode pour se dispenser de calculer l'inverse :
trouver un polynôme interpolateur tq $\exp(\lambda_i) = P(\lambda_i)$
et alors $\exp(A) = P(A)$ ← $A = PDP^{-1} \Rightarrow P(A) = P\, P(D) P^{-1} = P \exp(D) P^{-1} = \exp(A)$

Ici : $Q(1) = e$, $Q(2) = e^2$. $\quad Q = aX + b$.

$e = a + b$, $e^2 = 2a + b$ $\to$ $a = e^2 - e$, $b = 2e - e^2$

$Q(X) = e^2 X - eX + 2e - e^2$

$\exp(A) = (e^2 - e)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2e - e^2) I_2 = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$

⚠ cf Dunford. Ds cet expr, si on écrit
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ≠ Dunford car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne comm pas !!

Questions / Exos ②.

- $\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp A \overset{?}{\Rightarrow} AB = BA$

FAUX C ex $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}}_{A}$. $\exp(\underbrace{\quad}_{A}) = I_n$.

Il suffit de trouver B ne commutant pas avec A

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi c & 2\pi d \\ -2\pi a & -2\pi b \end{pmatrix}$$

$c \neq -b$
$\vee$
$d \neq a$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi b & 2\pi a \\ -2\pi d & 2\pi c \end{pmatrix}$$

ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $AB = BA \Leftrightarrow \forall t \ \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$

$(\Rightarrow)$ OK.

$\boxed{\Leftarrow}$ dérive 2x. : $(A+B)\exp(t(A+B)) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)B\exp(tB)$

+ en $t=0$

$$(A+B)^2 \times 1 = A^2 + AB + AB + B^2$$

$$\cancel{A^2} + \cancel{B^2} + \cancel{AB} + BA = \cancel{A^2} + \cancel{AB} + AB + \cancel{B^2}$$

( on peut simplifier par $\exp(tB)$ pour raccourcir les calculs)

Ou : dvt Taylor : $\exp(t(A+B)) = I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}\underbrace{(A+B)^2}_{A^2+B^2+AB+BA} + o(t^2)$

$\exp(tA) = I_n + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + o(t^2)$

$\exp(tB) = I_n + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + o(t^2)$

$\exp(tA)\exp(tB) = I_n + t(A+B) + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^2}{2}B^2 + t^2 AB + o(t^2)$

+ identificat°

Question / Exo : (3)

• $F : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \longmapsto F(t) \end{cases}$ Qd est-ce que $\exp(F(t))' = F'(t)\exp(F(t))$ ?

~~CNS~~ : $F(t)F'(t) = F'(t)F(t)$

?

S : si on élève F à la puiss k, l'égalité tjs ok

~~N~~ : C-ex : $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exp\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? $\begin{cases} Q(0) = 1 \\ Q(1) = e \end{cases}$ $\qquad Q = aX + b \qquad b = 1$

$a + b = e$

$a = e - 1$

ne marche pas

$Q = eX - X + 1$

$Q\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & te - t + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\exp\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} e & te - t + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & e - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & te - t + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Mq. $\{ABA^{-1}, A \in GL_n(\mathbb{C})\}$ bornée ssi B est une homothétie $\lambda I$.

(⇐) OK

$\in \mathbb{C}$

A

(⇒) $\forall t \ \exp(tM) B \exp(-tM)$ bornée → cste

(Liouville, analyse complexe, fonc° holomorφ bornée sur $\mathbb{C} \Rightarrow$ cste). en $t = 1$ et $t = 0$ : $B = \exp(M) B \exp(-M)$

B et exp M commutent et exp M surj dc $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$ dc $B = \lambda Id$

(B commute av $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow B = \lambda Id$, regarder $A = E_{ij}$)